

DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.06.038

角接触球轴承动力学建模与实验*

方 兵 张 雷 曲兴田 赵 继

(吉林大学机械科学与工程学院, 长春 130025)

【摘要】 针对轴承装配体结构振动的问题,采用矩阵变换方法分析了双列角接触球轴承接触变形的几何关系,使得分析过程更加简洁和精确,并以此为依据,结合赫兹接触理论和拉格朗日分析力学原理建立了轴承装配体结构5自由度动力学模型;讨论了预紧力、接触角、滚动体位置等对系统固有频率的影响;研制了轴承装配体结构动力学参数测试实验台,实验结果表明,该动力学模型能够较准确地预测结构动态参数,误差在15%以内,满足工程计算的需要。

关键词: 球轴承 角接触 动力学 建模 实验

中图分类号: TH133.33⁺¹ 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2012)06-0215-05

Dynamic Modeling and Experiment of Angular Contact Ball Bearing

Fang Bing Zhang Lei Qu Xingtian Zhao Ji

(Institute of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract

Considered structure vibration of angular contact ball bearing, the elastic deformation of rolling elements in form of matrix or vector was defined so as to keep structural integrity and get clear notation, in this way, the elastic deformation of every rolling element could be calculated easily. Combining Hertz contact theory and Lagrange mechanics theory, a 5-DOF dynamic model was built. By using this model, the relationship between the frequency of structure and the preload, the contact angle and ball position was discussed. Experimental results proved that the error of the dynamic equation was less than 15%, which met the requirement of engineering calculations.

Key words Ball bearing, Angular contact, Dynamics, Modeling, Experiment

引言

无论是主轴系统还是传动系统,轴承作为支撑部件,其刚度是系统的薄弱环节,其动力学特性对系统整体特性影响较为明显,因此轴承动力学特性计算对于系统的设计与维护来说是十分重要的。国内外研究人员对此做了大量的工作。文献[1~2]推导了轴承刚度矩阵的解析公式,考虑了轴承径向间隙和内部载荷分布角等影响,并研究了轴承受载、变形位移的数值计算方法。Harris等^[3]利用转子系统结构的对称性,采用梁单元分析转轴,轴承则被3个自由度(轴向、径向和转角)的线性弹簧等效代替。

Lim等^[4~5]基于Hertz接触理论建立了5自由度分析模型,利用力学平衡方程推导了刚度矩阵。Royston等^[6]在Lim的分析基础之上,建立了轴承振动的5自由度动力学方程,并讨论了不同预紧力下结构的固有频率和刚度的变化情况。Rook等^[7]在分析由轴承连接的板梁耦合结构中,对Lim的模型做了进一步的发展,采用了坐标变换的方法更简洁地推导了5自由度分析模型。Lynagh等^[8]在分析立式加工中心主轴振动特性时,建立了考虑制造误差的分析模型。近年来,在涉及到轴承结构振动计算时,大多采用的是在Lim等提出的分析模型基础上做一定的修改^[9~10]。

收稿日期: 2011-11-23 修回日期: 2012-02-13

*“十一五”国家科技重大专项资助项目(2009ZX04014-035)

作者简介: 方兵,博士生,主要从事机床结合部静动热态分析研究, E-mail: ffb2003@yahoo.cn

通讯作者: 张雷,教授,博士生导师,主要从事智能精密制造研究, E-mail: profzhanglei@yahoo.com.cn

本文采用矩阵变换分析方法^[11],建立双列角接触球轴承接触变形关系。采用拉格朗日分析力学原理建立轴承结构振动的5自由度动力学模型。

1 双列角接触球轴承变形

为了增加轴承的刚度,通常情况下成对安装角接触球轴承,并对其施加轴向预紧力。轴承的配对方式一般可分为背对背(DB)、面对面(DF)和并列(DT)3种方式。图1所示为面对面安装方式,轴承通过隔套预紧,预紧力的大小可由内、外隔套的宽度差调整。

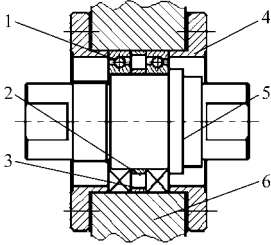


图1 双列面对面轴承组件结构
Fig. 1 Structure of bearing assembled with DF
1. 轴承 2. 内圈隔套 3. 外圈隔套 4. 端盖 5. 轴 6. 轴承座

当轴产生位移时,则相应的钢球也发生弹性变形,其变形的关系可通过几何计算得到。如图2所示,在轴的质心位置建立坐标系 $OXYZ$,以及分别在两列轴承内圈中心处建立坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 和 $O_2X_2Y_2Z_2$ 。为便于分析,现假设轴承外圈固定不动,轴承内圈与轴固定。因此,当轴运动时,轴承内圈与之一起运动,并与外圈产生相对位移。根据轴承运动特点,可用5个自由度对轴的运动加以描述,3个方向的平动和2个方向的转动,即 $\delta = (\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y)$ 。

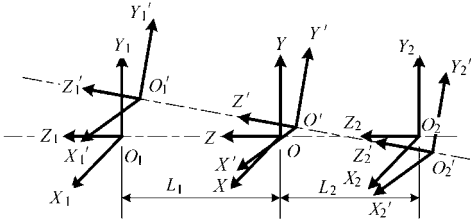


图2 双列面对面轴承坐标变换示意图
Fig. 2 Coordinate transformation of DF

由坐标变换原理可得到 $O_1'X_1'Y_1'Z_1'$ 相对于 $O_1X_1Y_1Z_1$ 的变换矩阵 T_1 和 $O_2'X_2'Y_2'Z_2'$ 相对于 $O_2X_2Y_2Z_2$ 的变换矩阵为 T_2 为

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & 0 & \sin\theta_y & \delta_x + L_1\sin\theta_y \\ \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y & \delta_y - L_1\sin\theta_x\cos\theta_y \\ -\cos\theta_x\sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y & \delta_z - L_1 + L_1\cos\theta_x\cos\theta_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & 0 & \sin\theta_y & \delta_x - L_2\sin\theta_y \\ \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y & \delta_y + L_2\sin\theta_x\cos\theta_y \\ -\cos\theta_x\sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y & \delta_z + L_2 - L_2\cos\theta_x\cos\theta_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 L_1 ——第1列轴承内圈中心点 O_1 点到轴质心 O 的距离
 L_2 ——第2列轴承内圈中心点 O_2 点到轴质心 O 的距离

如图3所示,变形前,第1列轴承内圈滚道曲率中心线上一点 $P_{1\varphi}$ 在 $O_1X_1Y_1Z_1$ 中的坐标为

$$P_{1\varphi} = (R_i\sin\varphi, R_i\cos\varphi, 0, 1) \quad (3)$$

式中 R_i ——内圈沟道曲率中心圆的半径
 φ ——滚动体位置角

同理,第2列轴承内圈滚道曲率中心线上一点 $P_{2\varphi}$ 在 $O_2X_2Y_2Z_2$ 中的坐标为

$$P_{2\varphi} = (R_i\sin\varphi, R_i\cos\varphi, 0, 1) \quad (4)$$

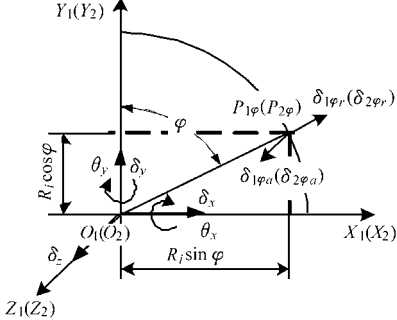


图3 角接触球轴承弹性变形示意图
Fig. 3 Deformation of angular contact ball bearing

受载荷作用以后,与 $P_{1\varphi}$ 相对应的内圈沟道曲率中心线上一点 $P'_{1\varphi}$ 在坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 中的坐标为

$$P'_{1\varphi} = T_1 P_{1\varphi} = (R_i\sin\varphi\cos\theta_x + \delta_x + L_1\sin\theta_y, R_i\sin\varphi\sin\theta_x\sin\theta_y + R_i\cos\varphi\cos\theta_x + \delta_y - L_1\sin\theta_x\cos\theta_y, -R_i\sin\varphi\cos\theta_x\sin\theta_y + R_i\cos\varphi\sin\theta_x + \delta_z - L_1 + L_1\cos\theta_x\cos\theta_y, 1) \quad (5)$$

同理,与 $P_{2\varphi}$ 相对应的内圈沟道曲率中心线上一点 $P'_{2\varphi}$ 在坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$ 中的坐标为

$$P'_{2\varphi} = T_2 P_{2\varphi} = (R_i\sin\varphi\cos\theta_x + \delta_x - L_2\sin\theta_y, R_i\sin\varphi\sin\theta_x\sin\theta_y + R_i\cos\varphi\cos\theta_x + \delta_y + L_2\sin\theta_x\cos\theta_y, -R_i\sin\varphi\cos\theta_x\sin\theta_y + R_i\cos\varphi\sin\theta_x + \delta_z + L_2 - L_2\cos\theta_x\cos\theta_y, 1) \quad (6)$$

接触变形分析中,弹性变形量通常为微小量,因此可取 $\cos\theta_x \approx 1$, $\cos\theta_y \approx 1$, $\sin\theta_x \approx \theta_x$, $\sin\theta_y \approx \theta_y$,并略去高次项,则任意位置角 φ 处的滚动体在 XYZ 方向上的弹性变形量 $\Delta_{1\varphi}$ 和 $\Delta_{2\varphi}$ 为

$$\Delta_{1\varphi} = P'_{1\varphi} - P_{1\varphi} = (\Delta_{1x}, \Delta_{1y}, \Delta_{1z}, 0) \quad (7)$$

$$\Delta_{2\varphi} = \mathbf{P}'_{2\varphi} - \mathbf{P}_{2\varphi} = (\Delta_{2x}, \Delta_{2y}, \Delta_{2z}, 0) \tag{8}$$

其中
$$\begin{aligned} \Delta_{1x} &= \delta_x + L_1 \theta_y & \Delta_{1y} &= \delta_y - L_1 \theta_x \\ \Delta_{1z} &= \delta_z + R_i \theta_x \cos \varphi - R_i \theta_y \sin \varphi \\ \Delta_{2x} &= \delta_x - L_2 \theta_y & \Delta_{2y} &= \delta_y + L_2 \theta_x \\ \Delta_{2z} &= \delta_z + R_i \theta_x \cos \varphi - R_i \theta_y \sin \varphi \end{aligned}$$

如图 3~4 所示,进一步计算得到钢球在接触法向上的变形量为

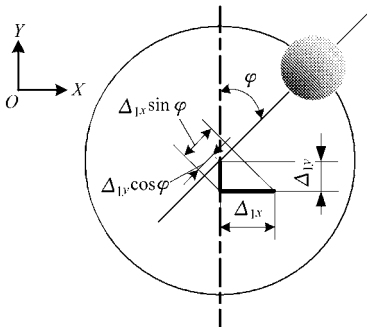


图 4 滚动体弹性变形示意图
Fig. 4 Deformation of rolling elements

$$\delta_{1\varphi} = \delta_{1\varphi a} \sin \alpha_0 + \delta_{1\varphi r} \cos \alpha_0 \tag{9}$$

其中
$$\delta_{1\varphi r} = \Delta_{1x} \sin \varphi + \Delta_{1y} \cos \varphi \quad \delta_{1\varphi a} = \Delta_{1z}$$

式中 α_0 ——接触角

同理,有

$$\delta_{2\varphi} = \delta_{2\varphi a} \sin \alpha_0 + \delta_{2\varphi r} \cos \alpha_0 \tag{10}$$

其中
$$\delta_{2\varphi r} = \Delta_{2x} \sin \varphi + \Delta_{2y} \cos \varphi \quad \delta_{2\varphi a} = \Delta_{2z}$$

2 轴承动力学方程推导

分析时,考虑到轴和轴承座自身固有频率较高,可视轴承座和轴为刚体,之间通过滚动体连接,滚动体为弹性体,可用弹簧等效代替。

根据 Hertz 接触理论^[12],球轴承每一个滚动体的载荷与变形之间关系为

$$Q_n = k_n \delta_n^{3/2} \tag{11}$$

式中 Q_n ——滚动体在接触法向上弹性力

k_n ——与几何尺寸有关的常数

δ_n ——接触法向上的弹性变形

因此,钢球在接触法线上的刚度为

$$K_n = \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n} = 1.5 k_n \delta_n^{0.5} \tag{12}$$

考察双列轴承装配的结构特点,系统动能 T 、势能 U 以及耗散函数 Φ 为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 m_i \dot{\delta}_i^2 \tag{13}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z K_n \delta_{1i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z K_n \delta_{2i}^2 \tag{14}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^Z \eta_i \dot{\delta}_{1i}^2 + \sum_{i=1}^Z \eta_i \dot{\delta}_{2i}^2 \tag{15}$$

式中 m_i ——轴的质量或转动惯量

δ_i ——轴的平动自由度或者转动自由度

K_n ——钢球在接触法线上的刚度

δ_{1i}, δ_{2i} ——第 i 个滚动体在接触法向上的变形量

η_i ——钢铁的损耗因子,取 $\eta_i = 0.005$

Z ——轴承滚动体数目

根据拉格朗日力学分析原理,可得到系统动力学方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\delta}_i} + \frac{\partial U}{\partial \delta_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \tag{16}$$

式中 Q_i ——系统广义力

将式(9)和(10)代入式(16),并表示成矩阵的形式

$$\mathbf{M} \ddot{\delta} + \mathbf{C} \dot{\delta} + \mathbf{K} \delta = \mathbf{Q} \tag{17}$$

式中 $\mathbf{M}$ ——质量矩阵 $\mathbf{C}$ ——阻尼矩阵

$\mathbf{K}$ ——刚度矩阵 $\mathbf{Q}$ ——广义力向量

令式(17)中的 $\mathbf{Q} = 0$,可求解得到系统五阶固有频率^[13~14]。

考虑轴承预紧力、接触角以及滚动体位置等对装配体结构固有频率等的影响,对机床中常用 NSK 公司生产的 3 种接触角类型的轴承(7020C、7020A5、7020A)进行分析计算,角接触球轴承几何参数如表 1 所示,预紧力数值如表 2 所示,计算结果如图 5~7 所示。

图 5 为双列面对面安装的 7020A 型轴承在不同预紧力等级下结构固有频率。从图中可知,随着预紧力的增大,各阶固有频率均变大,这是由轴承刚度随着预紧力的增大而增大导致的。

表 1 轴承几何参数

Tab. 1 Geometric parameters of bearing	
参数	数值
外道系数 r_e	0.515
内道系数 r_i	1.525
滚动体直径 D_w/mm	14.288
滚动体数目 Z	20
轴承中径 d_m/mm	125.25
接触角 $\alpha/(\circ)$	15, 25, 30

表 2 预紧力

Tab. 2 Value of preload		N		
轴承型号	预紧等级			
	轻预紧	中预紧	重预紧	
7020C	540	1 270	2 550	
7020A5	830	1 960	3 920	
7020A	840	2 750	4 310	

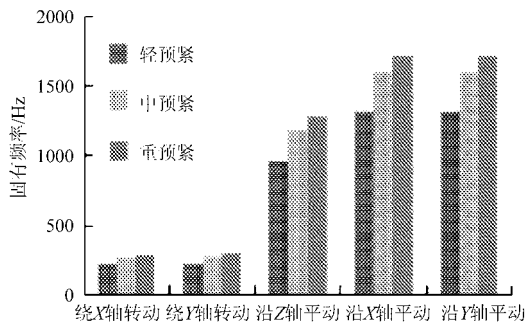


图5 7020A型轴承在不同预紧力等级下的前5阶固有频率

Fig.5 Frequency of the first five order under different preloadings of 7020A

图6为3种双列面对面安装内径相同接触角不同的角接触球轴承,在同一预紧等级下结构的固有频率。从图中可知,对于3种不同类型的轴承,绕X轴转动、绕Y轴转动、沿X轴平动和沿Y轴平动四阶固有频率的相对变化较小,而沿着Z轴平动这一阶固有频率变化相对较大。这是由于在同一预紧等级下,对于不同接触角的球轴承,其轴向刚度变化较大。

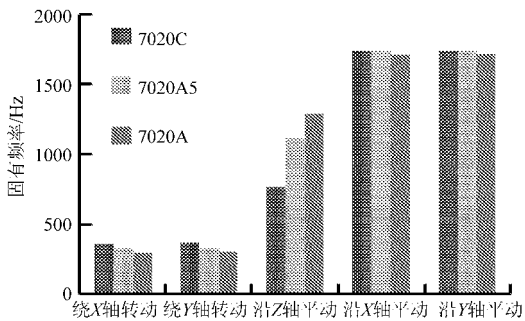


图6 接触角对结构固有频率影响

Fig.6 Effect of different contact angles on natural frequency of structure

图7为7020A5型轴承在同样的预紧载荷下,不同位置角处的结构固有频率。从图中可以看出,位置角对结构的动态性能影响很小,因此可以利用位置角对称的特点来代替一般条件进行简化计算。

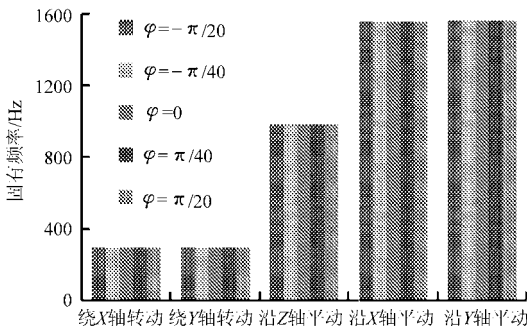


图7 位置角对结构固有频率影响

Fig.7 Effect of different φ on natural frequency of structure

3 实验

通过模态实验获取轴承装配体结构的频率响应函数(FRF),然后分析频响函数计算固有频率及对应的振型。

实验中采用北京东方振动与噪声测试研究所研制的模态分析系统。系统由激振系统、测量系统和分析系统组成。采用MSC-1型力锤进行锤击实验,加速度信号则由INV9824型ICP加速度传感器获取,采用INV3018G动态信号分析系统,对模态实验的输入和输出信号进行采集,经抗混滤波、采样和模数转换,最后经过FFT运算得到所需要的频响函数数据。图8为7020A型双列面对面安装结构动态参数测试现场,实验中采用海绵垫支撑待测结构^[15]。

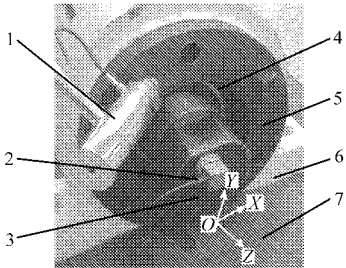


图8 模态实验

Fig.8 Modal experiment

1. 激励锤 2. 三向加速度传感器 3. 轴 4. 轴承 5. 端盖
6. 轴承座 7. 海绵垫

X、Y、Z 3 个方向传感器测得的 FRF 曲线如图9所示,X方向传感器测量X方向上的平动以及绕Y轴的转动,Y方向传感器测量Y方向上的平动以及绕X轴的转动,Z方向传感器测量轴向振动。由于结构对称等特点,绕X轴转动固有频率与绕Y轴转动固有频率相近,X方向上的平动固有频率与Y方向平动固有频率相近。

分别对机床中常用的3种类型角接触球轴承(7020C、7020A5和7020A)面对面装配在3种不同预紧等级条件下进行模态实验,并与理论计算对比,结果如表3所示。对比结果显示,除了在轻预紧条

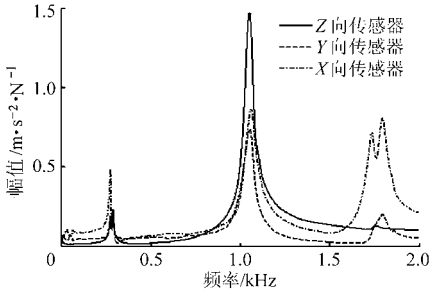


图9 传感器测得的FRF曲线

Fig.9 FRF acquired by sensor

表 3 前 5 阶固有频率及振型对比

Tab.3 Comparison of the first five frequencies and modes

轴承 型号	预紧 等级	固有频率/Hz		误差 /%	振型
		实验值	计算值		
7020C	轻预紧	288.27	235.57	22.4	X 轴转动
		292.34	242.13	20.7	Y 轴转动
		540.99	454.09	19.1	Z 方向平动
		1 367.70	1 175.48	16.4	X 方向平动
		1 369.30	1 225.96	11.7	Y 方向平动
	中预紧	327.32	305.29	7.2	X 轴转动
		331.90	350.96	5.4	Y 轴转动
		648.54	699.52	7.3	Z 方向平动
		1 564.30	1 384.62	13.0	X 方向平动
		1 566.30	1 399.04	12.0	Y 方向平动
	重预紧	360.79	326.14	10.6	X 轴转动
		365.79	348.69	4.9	Y 轴转动
		761.59	806.37	5.6	Z 方向平动
		1 740.30	1 617.89	7.6	X 方向平动
		1 742.70	1 646.63	5.8	Y 方向平动
7020A5	轻预紧	227.51	221.15	2.9	X 轴转动
		230.38	228.36	0.9	Y 轴转动
		737.67	644.23	14.5	Z 方向平动
		1 201.30	1 024.48	17.3	X 方向平动
		1 204.50	1 025.76	17.4	Y 方向平动
	中预紧	291.58	255.19	12.5	X 轴转动
		295.21	260.44	11.8	Y 轴转动
		983.91	987.98	0.4	Z 方向平动
		1 557.10	1 586.54	1.9	X 方向平动
		1 561.40	1 605.78	2.8	Y 方向平动
	重预紧	322.42	300.48	7.3	X 轴转动
		326.39	302.88	7.8	Y 轴转动
		1 124.30	1 100.96	2.1	Z 方向平动
		1 738.50	1 644.23	5.7	X 方向平动
		1 743.60	1 699.52	2.6	Y 方向平动

轻预紧		229.34	215.28	6.5	X 轴转动
		231.99	221.43	4.8	Y 轴转动
		959.91	783.65	22.5	Z 方向平动
		1 314.00	1 144.23	14.8	X 方向平动
		1 318.80	1 247.59	5.7	Y 方向平动
7020A	中预紧	275.48	257.81	6.9	X 轴转动
		278.63	249.65	11.6	Y 轴转动
		1 186.60	1 043.73	12.1	Z 方向平动
		1 595.30	1 421.93	12.2	X 方向平动
		1 601.30	1 417.19	13.0	Y 方向平动
	重预紧	294.28	273.44	7.6	X 轴转动
		297.62	285.94	4.1	Y 轴转动
		1 290.00	1 187.50	7.9	Z 方向平动
		1 715.50	1 739.06	1.4	X 方向平动
		1 722.10	1 784.37	3.5	Y 方向平动

件下,由于滚动体与滚道接触不充分导致较大的误差以外,其他条件下,理论计算值与实验测得值相对误差在 15% 以内。误差产生的原因主要有:①计算中并未考虑高阶振动对低阶振动的影响。②由于计算时只考虑了钢球与滚道之间的接触关系,并未考虑轴承与端盖和轴承座之间的接触。③对轴承结构计算的线性化处理也是产生误差的重要因素之一。

4 结论

- (1) 采用坐标变换的方法分析双列角接触球轴承接触变形关系,该方法使得变形分析更为简洁和精确,能更为简便的计算各滚动体在受力状况下的弹性变形量。
- (2) 结合赫兹接触理论与拉格朗日力学分析原理建立了轴承装配体的 5 自由度动力学方程,该方程考虑了结构阻尼的影响,更符合实际边界条件。
- (3) 理论分析与实验结果对比表明,建立的 5 自由度动力学方程具有较高的精度,误差大部分在 15% 以内,满足工程计算的需要。

参 考 文 献

1 White M F. Rolling element bearing vibration transfer characteristics: effect of stiffness [J]. ASME Journal of Applied Mechanics,1979,46(3):677 ~ 684.

2 谢涛,刘品宽,陈在礼. 转台轴系轴承刚度矩阵的理论推导与数值计算[J]. 哈尔滨工业大学学报,2003,35(3): 329 ~ 333.
Xie Tao,Liu Pinkuan,Chen Zaili. Theoretical analysis and numerical estimation of stiffness matrix of angular contact ball bearing in a spindle-bearing system [J]. Journal of Harbin Institute of Technology,2003,35(3):329 ~ 333. (in Chinese)

3 Harris T A,Kotzalas M N. Advanced concepts of bearing technology [M]. New York:Taylor & Francis,2006.

4 Lim T C,Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings,part I :bearing stiffness formulation [J]. Journal of Sound and Vibration,1990,139(2):179 ~ 199.

5 Lim T C,Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings,part IV :statistical energy analysis [J]. Journal of Sound and Vibration,1992,153(1):37 ~ 50.

(下转第 225 页)

参 考 文 献

- 1 Mostofi A, Gohar R. Elastohydrodynamic lubrication of finite line contacts[J]. ASME Journal of Lubrication Technology, 1983, 105(4): 598 ~ 604.
- 2 Hamrock J, Dowson D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts, part III—fully flooded results [J]. ASME Journal of Lubrication Technology, 1977, 99(2): 264 ~ 276.
- 3 莫云辉. 正反圆锥滚子弹流润滑 [D]. 上海: 上海工业大学, 1994.
Mo Yunhui. EHL of taper roller in opposite direction [D]. Shanghai: Shanghai Industrial University, 1994. (in Chinese)
- 4 汪久根, 洪玉芳. 圆锥滚子摩擦副的润滑分析(I): 刚性等粘度润滑区[J]. 浙江大学学报, 2003, 37(2): 208 ~ 210.
Wang Jiugen, Hong Yufang. Lubrication of tapered roller bearing (I): isoviscous rigid regime [J]. Journal of Zhejiang University, 2003, 37(2): 208 ~ 210. (in Chinese)
- 5 汪久根, 洪玉芳. 圆锥滚子摩擦副的润滑分析(II): 压粘刚性润滑区[J]. 浙江大学学报, 2003, 37(3): 359 ~ 361.
Wang Jiugen, Hong Yufang. Lubrication of tapered roller bearing (II): piezoviscous rigid regime [J]. Journal of Zhejiang University, 2003, 37(3): 359 ~ 361. (in Chinese)
- 6 杨萍, 杨沛然, 刘晓玲. 圆锥滚子的等温弹流润滑数值分析[J]. 摩擦学学报, 2005, 25(5): 456 ~ 460.
Yang Ping, Yang Peiran, Liu Xiaoling. Numerical analysis of isothermal EHL for tapered roller [J]. Tribology, 2005, 25(5): 456 ~ 460. (in Chinese)
- 7 王优强, 刘冬伟, 李伟. 渐开线斜齿轮瞬态弹流润滑数值分析[J]. 润滑与密封, 2008, 33(7): 20 ~ 24.
Wang Youqiang, Liu Dongwei, Li Wei. Numerical analysis of instantaneous EHL for helical gears [J]. Lubrication Engineering, 2008, 33(7): 20 ~ 24. (in Chinese)
- 8 Yang P R, Wen S Z. A generalized reynolds equation for non-newtonian thermal elastohydrodynamic lubrication [J]. ASME Journal of Tribology, 1990, 112(4): 631 ~ 636.
- 9 Venner C H. Multilevel solution of the EHL line and point contact problems[D]. Enschede: University of Twente, 1991.
- 10 杨沛然. 流体润滑数值分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- 11 纪敬虎, 符永宏, 魏龙, 等. 激光表面织构机械密封润滑特性的试验研究[J]. 排灌机械工程学报, 2011, 29(5): 427 ~ 431.
Ji Jinghu, Fu Yonghong, Wei Long, et al. Experiment research on lubrication properties of laser surface texturing mechanical seal[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2011, 29(5): 427 ~ 431. (in Chinese)

(上接第 219 页)

- 6 Royston T J, Basdogan I. Vibration transmission through self-aligning (spherical) rolling element bearings: theory and experiment [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 215(5): 997 ~ 1 014.
- 7 Rook T E, Singh R. Structural intensity calculations for compliant plate-beam structures connected by bearings [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 211(3): 365 ~ 387.
- 8 Lynagh N, Rahnejat H. Bearing induced vibration in precision high speed routing spindles [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2000, 40(4): 561 ~ 577.
- 9 Cermelj P, Boltezar M. An indirect approach to investigating the dynamics of a structure containing ball bearings [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 276(1 ~ 2): 401 ~ 417.
- 10 Patel V N, Tandon N. A dynamic model for vibration studies of deep groove ball bearings considering single and multiple defects in races [J]. ASME Journal of Tribology, 2010, 132(4): 041101 ~ 041110.
- 11 姜伟, 陈学东, 严天宏. 基于矩阵变换的多刚体系统振动分析符号建模[J]. 机械工程学报, 2008, 44(6): 54 ~ 60.
Jiang Wei, Chen Xuedong, Yan Tianhong. Symbolic formulation of rigid multibody systems for vibration analysis based on matrix transformation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(6): 54 ~ 60. (in Chinese)
- 12 罗继伟, 罗天宇. 滚动轴承分析计算与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- 13 邹经湘, 于开平. 结构动力学[M]. 2 版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2009.
- 14 米良, 殷国富, 孙明楠, 等. 基于结合部动力学特性的立柱-主轴系统动力学模型研究[J]. 农业机械学报, 2011, 42(12): 202 ~ 207.
Mi Liang, Yin Guofu, Sun Mingnan, et al. Column-spindle system dynamic model based on dynamic characteristics of joints [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(12): 202 ~ 207. (in Chinese)
- 15 沃德·海伦, 斯提芬·拉门兹, 波尔·萨斯. 模态分析理论与试验[M]. 白化同, 郭继忠, 译. 北京: 北京理工大学出版社, 2001.