DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.06.037

金属材料结合部法切向刚度修正与实验验证*

田红亮[1]　赵春华[1]　朱大林[1]　秦红玲[1]　李　响[1]　毛宽民[2]

(1.三峡大学机械与材料学院,宜昌 443002;2.华中科技大学机械科学与工程学院,武汉 430074)

【摘要】 推导了分形维数、分形粗糙度的近似解析解,修正了结合部法向接触刚度相关公式。编写了求解域扩展系数的通用 Matlab 程序,推导出结合部切向接触刚度的解析解。以 XHK5140 型自动换刀计算机数控立式镗铣床上的结合部为研究对象,以测试试件的实验结果为基准,按照相似振型相关性、固有频率定量比较的原则,对结合部法向与切向接触刚度的理论解进行了验证。验证表明理论模型的振型与实验的振型都一致,理论与实验固有频率的相对误差在 -16.8% ~16.8% 之间。

关键词:金属粗糙表面　结合部　法向接触刚度　切向接触刚度　修正　实验

中图分类号:TH113.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1298(2012)06-0207-08

Modification of Normal and Tangential Stiffness for Joint Interface with Metallic Material and Experimental Validation

Tian Hongliang[1]　Zhao Chunhua[1]　Zhu Dalin[1]　Qin Hongling[1]　Li Xiang[1]　Mao Kuanmin[2]

(1. *College of Mechanical and Material Engineering*, *China Three Gorges University*, *Yichang* 443002, *China*

2. *School of Mechanical Science and Engineering*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074, *China*)

Abstract

The proximate analytic results of fractal dimension and fractal roughness were derived. Some solutions associated with normal contact stiffness in joint interface were modified. A general Matlab program was compiled to solve the domain extension factor. The analytic expression for the tangential contact stiffness was deduced about joint interface. A joint interface selected as an example in XHK5140 automatic tool-changing CNC vertical boring and milling machine tool in terms of the experimental results about test specimen, the theoretical expressions for normal and tangential contact stiffness were validated via the correlation of similar vibration shape and quantitative comparison tenet of natural frequencies. The theoretical vibration shapes were in good line with the experimental ones. The relative error between the theoretical natural frequencies and the experimental results distributed from -16.8% to 16.8%.

Key words　Metallic rough surface, Joint interface, Normal contact stiffness, Tangential contact stiffness, Modification, Experiment

引言

文献[1]提出结合部法向接触刚度的改进接触模型,但存在 3 个缺陷:①结合部法向接触刚度相关公式有 4 处不合理。②虽给出域扩展系数与自变量 D 之间的超越方程,但未给出求解该方程的具体方法。③没有给出通过实验识别结合部 2 个重要表征参数(分形维数、分形粗糙度)的方法。

本文修正文献[1]的 3 个缺陷,编写求解域扩展系数的通用 Matlab 程序,给出识别结合部 2 个重要表征参数的方法,推导结合部切向接触刚度的解析解,对文献[1]中的结合部法向接触刚度、本文切

收稿日期:2011-12-27　修回日期:2012-02-11

*国家自然科学基金资助项目(51075234、50975104)

作者简介:田红亮,讲师,博士,主要从事界面力学研究,E-mail:thl19732003@yahoo.com.cn

向接触刚度的理论解进行有效性验证。

1 结合部法向刚度相关公式的修正

文献[1]中的结合部法向接触刚度相关公式有4处不合理,分别如下。

文献[1]中的轮廓标准差应为[2]

$$\sigma^2=\int_{\omega_l}^{\omega_h}P(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{G^{2(D-1)}}{2\ln\gamma}\frac{1}{4-2D}\left(\frac{1}{\omega_l^{4-2D}}-\omega_h^{2D-4}\right)=\frac{G^{2(D-1)}}{2\ln\gamma}\frac{1}{4-2D}(L^{4-2D}-\omega_h^{2D-4}) \tag{1}$$

文献[1]中的无量纲系数应为[3]

$$b=\frac{9\pi^2}{4} \tag{2}$$

文献[1]中的结合部法向总载荷应为

$$P=\frac{2^{\frac{9-2D}{2}}DG^{D-1}E^*(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{2-D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}}(3-2D)}a_l'^{\frac{D}{2}}\cdot\left(a_l'^{\frac{3-2D}{2}}-a_c'^{\frac{3-2D}{2}}\right)+\frac{KYD\psi^{\frac{2-D}{2}}}{2-D}a_l'^{\frac{D}{2}}a_c'^{\frac{2-D}{2}}=\frac{2^{\frac{12-3D}{2}}DG^{D-1}E^*(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{2-D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}}(3-2D)}a_l^{\frac{D}{2}}\left(a_l^{\frac{3-2D}{2}}-a_c^{\frac{3-2D}{2}}\right)+\frac{2KYD\psi^{\frac{2-D}{2}}}{2-D}a_l^{\frac{D}{2}}a_c^{\frac{2-D}{2}} \tag{3}$$

文献[1]中的结合部无量纲法向总载荷应为

$$P^*=2^{\frac{7}{4}}\pi^{-\frac{3}{4}}G^{*\frac{1}{2}}(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{16}}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\ln\left(\frac{A_r^*}{3\psi^{\frac{1}{4}}a_c^*}\right)+6K\varphi\psi^{\frac{1}{16}}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{\frac{3}{4}}a_c^{*\frac{1}{4}} \tag{4}$$

2 域扩展系数的 Matlab 求解和结合部切向刚度

域扩展系数与 D 之间的超越方程[1]为

$$\psi^{1-0.5D}-(1+\psi^{-0.5D})^{\frac{D-2}{D}}=\frac{2-D}{D} \tag{5}$$

文献[1,4]均只提到使用二分法可求解的方程(5),但二分法的计算相当麻烦[5]。文献[4]虽直接给出 D 为1~2、步长0.01时,对应的101个 ψ,但高端数控机床结合部的高精度建模对 D 的小数点后几位数提出更高的要求,因而文献[4]提供的101个离散数据不能满足工程实际需要。

为解决上述问题,如在 Matlab R2009b 语言 Command Window 窗口的指令行输入一行代码(在 File-Preferences-Command Window Preferences-Numeric format 中选择 long,在 Numeric display 中选择 loose)

eval(solve('phi^(1-0.5*1.27)-(1+phi^(-0.5*1.27))^((1.27-2)/1.27)=(2-1.27)/1.27'))

按回车键,可求得当 $D=1.27$ 时,对应的 ψ 为2.216 817 079 198 055,此值与文献[4]提供的2.216 8吻合。

两个球体单峰1、2之间互相作用的切向接触刚度[6]为

$$k_t=\frac{8}{\sqrt{\pi}}\sqrt[3]{1-\frac{\overline{Q}}{f\overline{P}}}G'\sqrt{a} \tag{6}$$

式中 $\overline{Q}$——单峰承受的切向载荷

f——结合部的摩擦因数

$\overline{P}$——单峰承受的法向载荷

G'——两接触粗糙表面复合切变模量

a——接触点的实际接触面积

$$\frac{1}{G'}=\frac{2-\mu_1}{G_1}+\frac{2-\mu_2}{G_2} \tag{7}$$

值得注意的是,式(7)不同于文献[7]中的公式。

将 a 与截面积 a' 之间的关系

$$a=\frac{a'}{2} \tag{8}$$

代入式(6)得

$$k_t=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}\sqrt[3]{1-\frac{\overline{Q}}{f\overline{P}}}G'\sqrt{a'} \tag{9}$$

实际接触面积与名义载荷近似呈正比[6],即

$$\frac{\overline{P}}{a}=\frac{P}{A_r}\approx\frac{E^*\sqrt{\frac{\sigma}{R}}}{3.2} \tag{10}$$

$$\frac{\overline{Q}}{a}=\frac{Q}{A_r}=\tau_b \tag{11}$$

式中 Q——结合部切向总载荷

A_r——结合部真实接触面积

由式(10)、式(11)可得

$$\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}=\frac{Q}{P}=\beta \tag{12}$$

将式(12)代入式(9)得

$$k_t=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}\sqrt[3]{1-\frac{\beta}{f}}G'\sqrt{a'} \tag{13}$$

值得一提的是,式(13)与文献[8~9]的计算式也不同。

微接触截面积分布函数为

$$n(a')=0.5D\psi^{1-0.5D}a_l'^{0.5D}a'^{-1-0.5D}\quad(0<a'\leqslant a_l') \tag{14}$$

机械结合部的切向总刚度可以表示为

$$K_t=\int_{a_c'}^{a_l'}k_tn(a')\mathrm{d}a'=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[3]{1-\frac{\beta}{f}}G'\int_{a_c'}^{a_l'}a'^{0.5}n(a')\mathrm{d}a' \tag{15}$$

将式(14)代入式(15)得

$$K_t=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{2}D\psi^{1-0.5D}}{\sqrt{\pi}(1-D)}\sqrt[3]{1-\dfrac{\beta}{f}}G'a_l'^{0.5D}\cdot \\ \qquad (a_l'^{0.5-0.5D}-a_c'^{0.5-0.5D}) & (1<D\leqslant 2)\\ \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[3]{1-\dfrac{\beta}{f}}G'\sqrt{a_l'}\ln\dfrac{a_l'}{a_c'} & (D=1)\end{cases} \tag{16}$$

最大微接触截面积 a_l' 和最大接触点的实际接触面积 a_l 之间的关系、a_c' 和 a_c 之间的关系分别为

$$a_l'=2a_l=\frac{2(2-D)}{D}\psi^{0.5D-1}A_r \tag{17}$$

$$a_c'=2a_c=\left[\frac{2^{9-2D}}{9\pi^{3-D}}G^{2D-2}\left(\frac{E^*}{H}\right)^2\ln\gamma\right]^{\frac{1}{D-1}} \tag{18}$$

将式(17)、式(18)代入式(16)得

$$K_t=\begin{cases}\dfrac{8D\psi^{1-0.5D}}{\sqrt{\pi}(1-D)}\sqrt[3]{1-\dfrac{\beta}{f}}G'a_l^{0.5D}\cdot \\ \qquad (a_l^{0.5-0.5D}-a_c^{0.5-0.5D}) & (1<D\leqslant 2)\\ \dfrac{2+2\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[3]{1-\dfrac{\beta}{f}}G'\sqrt{a_l}\ln\dfrac{a_l}{a_c} & (D=1)\end{cases} \tag{19}$$

由式(17)得

$$\frac{a_l}{A_a}=\frac{2-D}{D}\psi^{0.5D-1}\frac{A_r}{A_a}=\frac{2-D}{D}\psi^{0.5D-1}A_r^* \tag{20}$$

式中　A_a——结合部表观接触面积

将式(20)代入式(19)，可得式(19)的无量纲形式为

$$K_t^*=\begin{cases}\dfrac{8D\psi^{1+0.25D^2-D}}{\sqrt{\pi}(1-D)}\sqrt[3]{1-\dfrac{\beta}{f}}\left(\dfrac{2-D}{D}A_r^*\right)^{0.5D}\cdot \\ \qquad \left[\left(\dfrac{2-D}{D}\psi^{0.5D-1}A_r^*\right)^{0.5-0.5D}-a_c^{*0.5-0.5D}\right] \\ \qquad (1<D\leqslant 2)\\ \dfrac{2+2\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[3]{1-\dfrac{\beta}{f}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}A_r^*}\ln\dfrac{(\sqrt{5}-1)A_r^*}{2a_c^*} & (D=1)\end{cases} \tag{21}$$

$$a_c^*=\frac{a_c}{A_a}=\frac{1}{2}\left[\frac{2^{9-2D}}{9\pi^{3-D}}G^{*2D-2}\left(\frac{E^*}{H}\right)^2\ln\gamma\right]^{\frac{1}{D-1}} \tag{22}$$

其中　$K_t^*=\dfrac{K_t}{G'\sqrt{A_a}}$　$A_r^*=\dfrac{A_r}{A_a}$　$G^*=\dfrac{G}{\sqrt{A_a}}$

3　分形参数的识别方法

粗糙表面 1、2 的连续功率谱密度函数分别为

$$P_1(\omega)=\frac{G_1^{2D_1-2}}{2\ln\gamma_1}\omega^{2D_1-5} \tag{23}$$

$$P_2(\omega)=\frac{G_2^{2D_2-2}}{2\ln\gamma_2}\omega^{2D_2-5} \tag{24}$$

式中　G_i——表面 i 的分形粗糙度，$i=1,2$

D_i——表面 i 的分形维数，$i=1,2$

在法、切向载荷作用下，两个粗糙表面 1、2 组成一个结合部，该结合部的连续功率谱密度函数[10]为

$$P(\omega)=P_1(\omega)+P_2(\omega)=\frac{G^{2D-2}}{2\ln\gamma}\omega^{2D-5} \tag{25}$$

式中　G——结合部的分形粗糙度

D——结合部的分形维数

ω——空间频率

不失一般性，设 $D_1<D_2$。当 $G_1=G_2=3\times10^{-10}$ m、$\gamma_1=\gamma_2=1.5$ 时，粗糙表面 1、2 和结合部的连续功率谱密度函数如图 1 所示。

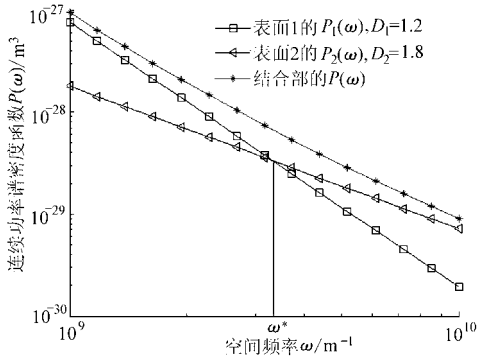


图 1　3 种连续功率谱密度函数

Fig. 1　Three kinds of continuous PSD functions

令　$P_1(\omega)=P_2(\omega)$ (26)

由图 1 和式(26)，可解得唯一解为

$$\omega=\omega^* \tag{27}$$

由式(27)可得两个粗糙表面 1、2 组成一个结合部的分形维数、分形粗糙度[11]分别为

$$P(\omega)\approx P_1(\omega)\geqslant P_2(\omega)\quad (D=D_1;G=G_1;\omega\leqslant\omega^*) \tag{28}$$

$$P(\omega)\approx P_2(\omega)>P_1(\omega)\quad (D=D_2;G=G_2;\omega>\omega^*) \tag{29}$$

由式(25)可得直线方程

$$\lg P(\omega)=(2D-5)\lg\omega+(2D-2)\lg G-\lg(2\ln\gamma) \tag{30}$$

令　$2D-5=k$ (31)

$$\lg G=-g \tag{32}$$

将式(31)、式(32)代入式(30)得

$$\lg P(\omega)=k\lg\omega-(2D-2)g-\lg(2\ln\gamma) \tag{33}$$

令　$-(2D-2)g-\lg(2\ln\gamma)=b$ (34)

将式(34)代入式(33)得

$$\lg P(\omega)=k\lg\omega+b \tag{35}$$

直线方程(35)如图 2 所示。

根据式(31)，D 由 k 决定。根据式(34)，g 由

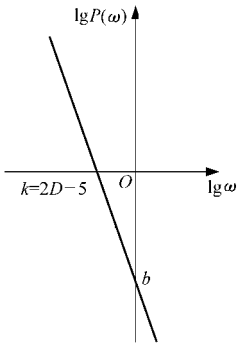


图 2 结合部的常用对数连续功率谱密度函数

Fig. 2 Logarithm continuous PSD function of joint interface

b、D 决定,因为 D 由 k 决定,所以 g 由 b、k 决定。根据式(32),G 由 g 决定,故 G 由 b、k 决定。

4 法切向刚度理论解的实验验证

4.1 测试试件的设计

根据 XHK5140 型机床横梁-立柱结合部的结构及几何尺寸,设计如图 3 所示含结合部的结构,两个 M12 内六角头螺栓将测试试件 1、2 连接。

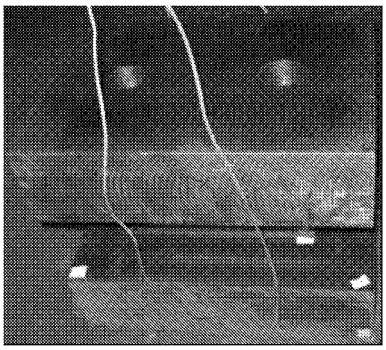


图 3 哑铃状测试试件

Fig. 3 Dumbbell test specimen

4.2 动力学实验装置

动力学测试设备为比利时 LMS Test. Lab Rev 10B 型机械振动测试分析仪,实验目的是在自由-自由条件下将实验结果与有限元模型进行比较,要求支撑柔软,连接点的运动幅度要小,选运动幅度最小的点作为支撑点,唯一激振点选择上试件 4 个角点中的任一个,用力锤沿两螺栓孔中心连线的方向(y 轴)从右向左激振,或从上向下(z 轴)激振,每次有效激振 5 次,取平均值,拾激振点为如图 4 所示的 72 个节点,每次使用 7 个 3 向加速度传感器。

4.3 分形参数实验识别及法切向刚度的计算

本文的结合部以空气为介质,采用三峡大学机械与材料学院的 Phoenix4000 型研磨抛光机磨削方式加工、CH_3COCH_3 清洗两接触表面并吹干。试件的参数见表 1。本文采用异种配对表面,不同于文献[12]的同种配对表面。

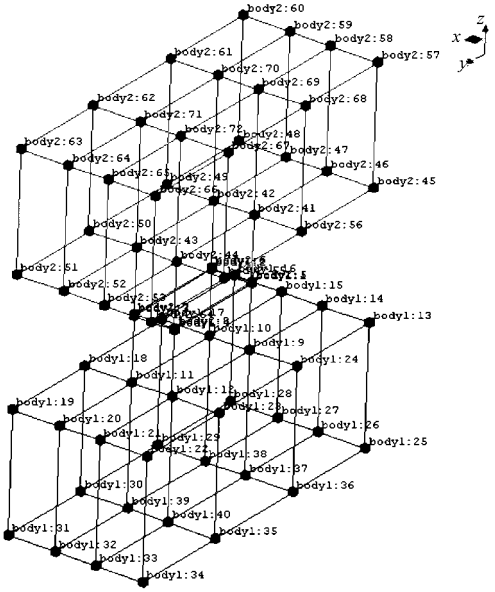


图 4 72 个拾激振节点

Fig. 4 72 nodes of picking vibration

表 1 两金属表面参数

Tab. 1 Parameters of two metallic surfaces

参数	数值	
	HT250 表面 1	45 号钢表面 2
E/GPa	116	205
μ	0.27	0.3
ρ/kg·m^{-3}	7 340	7 833
σ/μm	0.626	0.634
Y/MPa	240	353
H/MPa	700	500
f	0.3	0.3
γ	1.5	1.5

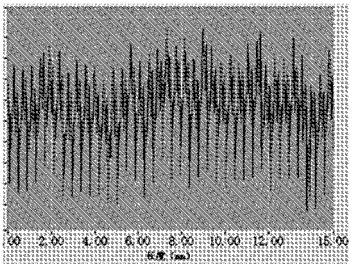
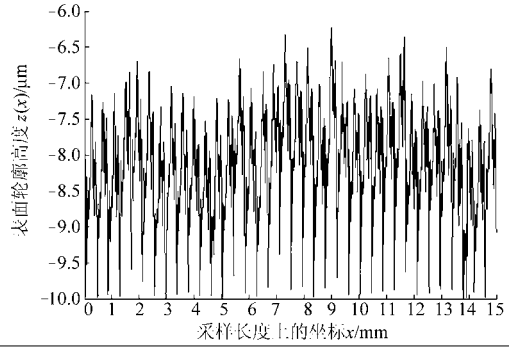
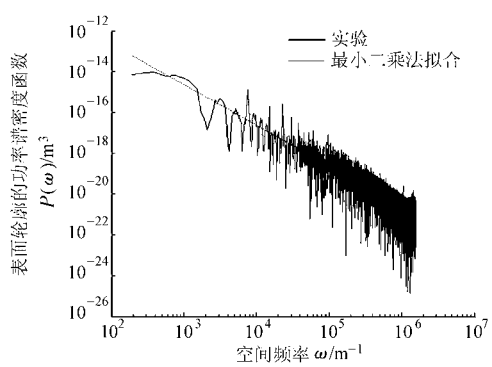
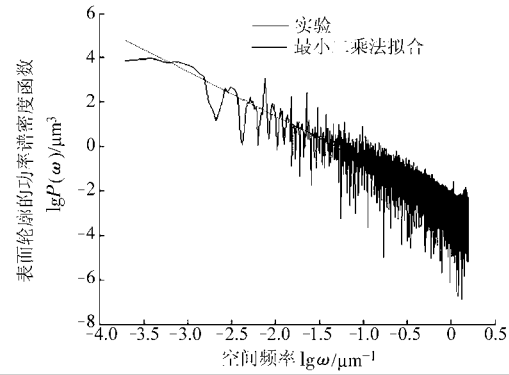
采用英国 Taylor - Hobson 公司的 Talysurf 5 - 120 型表面轮廓仪,放大倍率为 1 000,采样长度为 15 mm,采样间距为 1 μm,采样段数为 5,最小二乘滤波,离散化采样点数为 15 000。

设采样长度 $T=15$ mm;频率间隔为 $\Delta f=1/T$;采样表面轮廓高度的离散数据点数 l 为 15 000;采样间隔 Δx 为 1 μm;空间采样点数为 $N_s=T/\Delta x=15\,000$,取 $N_s=2^{14}>l$;采样频率为 $f_s=1/\Delta x$;最高频率为 f_{max},本文取 $f_{max}=f_s/2$;设定频率变化范围为 $f=f_{max}(0:N_s/2-1)/N_s$;对表面轮廓信号的表达式 $z(x)$ 进行补零的傅里叶变换,将 $z(x)$ 的尾部补零使 $z(x)$ 的长度达到 N_s,可得补零的傅里叶变换 $Y=\mathrm{FFT}(z,N_s)$;根据 Y 得到功率谱密度函数 $P(\omega)=|Y|^2/N_s$;对实测数据($\lg\omega$,$\lg P(\omega)$)进行最小二乘法的 1 次多项式拟合,可得常用对数功率谱密度函数(图 2)。

工件磨削时的情况见表 2，不均匀刻度功率谱法运用的是国际单位，采用的符号是斜率 k_1、纵截距 b_1、分形粗糙度的指数 g_1、分形维数 D_1、分形粗糙度 G_1；均匀刻度功率谱法以长度单位 μm 为出发点，运用的符号是 k_2、b_2、g_2、D_2、G_2。这两种方法识别的 5 个参数分别为 $k_1 = -2.151\ 9$，$b_1 = -7.987\ 8$，$D_1 = 1.424\ 1$，$g_1 = 9.525\ 5$，$G_1 = 2.982\ 0 \times 10^{-10}$ m；$k_2 = -2.151\ 9$，$b_2 = -2.899\ 0$，$D_2 = 1.424\ 1$，$g_2 = 3.525\ 5$，$G_2 = 2.982\ 0 \times 10^{-10}$ m。故结合部的 2 个重要表征参数为 $D = 1.424\ 1$，$G = 2.982\ 0 \times 10^{-10}$ m。

表 2　工件磨削时的分析结果

Tab. 2　Analyzing results of grinding test specimen

结果	不均匀刻度功率谱法	均匀刻度功率谱法
原始轮廓		
滤波轮廓		
实测与拟合 PSD		

将 $D = 1.424\ 1$ 代入式(5)并编写 Matlab 程序，得 $\psi = 2.063\ 354\ 860\ 508\ 690$。

在每个螺栓均承受拧紧力矩 $T = 30$ N·m 时，将表 1 的数据和 $D = 1.424\ 1$，$G = 2.982\ 0 \times 10^{-10}$ m，$\psi = 2.063\ 354\ 860\ 508\ 690$ 代入文献[1]的有关公式、式(21)，可得结合部的法、切向接触刚度分别为 $K_n = 1.472 \times 10^{10}$ N/m，$K_t = 2.128 \times 10^{9}$ N/m。

在每个螺栓均承受拧紧力矩 60 N·m 时，同理得 $K_n = 3.528 \times 10^{10}$ N/m，$K_t = 2.508 \times 10^{9}$ N/m。

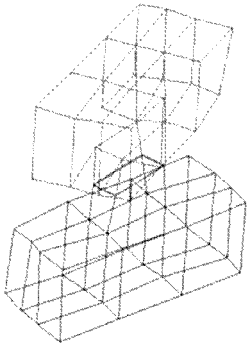
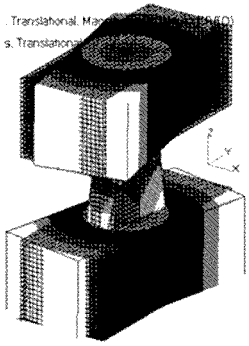
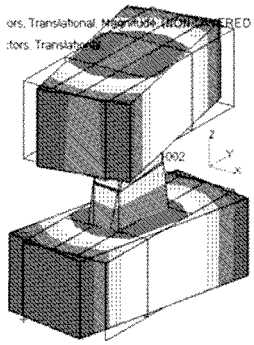
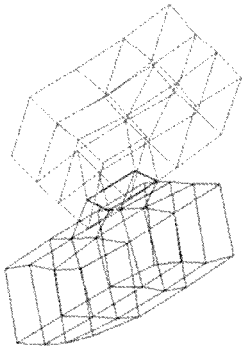
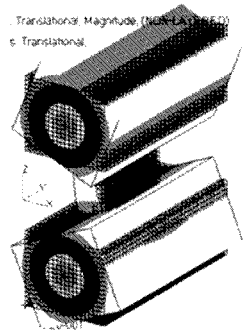
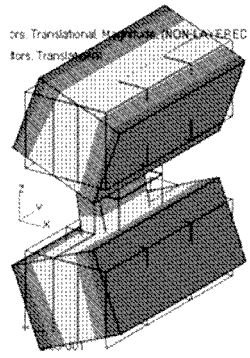
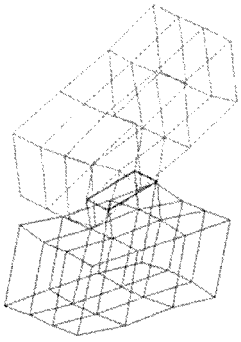
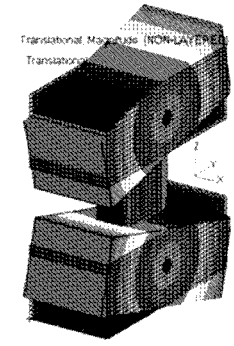
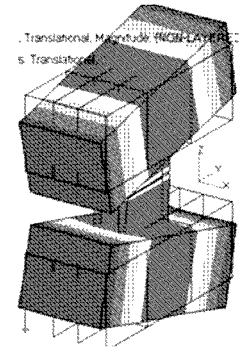
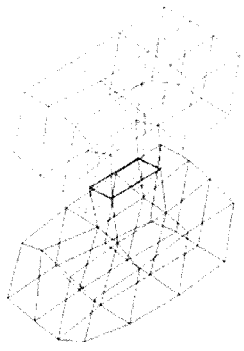
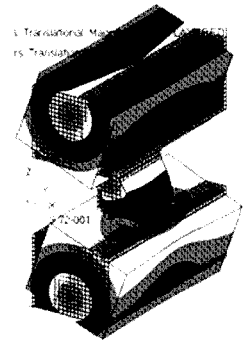
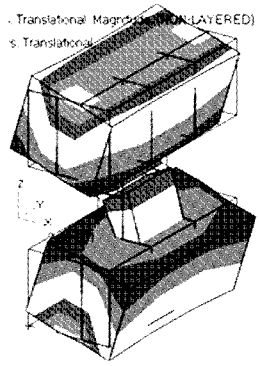
在每个螺栓均承受拧紧力矩 90 N·m 时，同理得 $K_n = 1.188 \times 10^{11}$ N/m，$K_t = 2.764 \times 10^{9}$ N/m。

4.4　理论模态与实验模态的比较

通过法、切向刚度解析解与有限元分析相结合的手段，建立机械结构有限元分析模型[13]。采用 MSC. FEA2005r2 有限元软件，在每个螺栓均承受拧紧力矩 30 N·m 工况下，两种模型识别振型与实验识别振型的比较见表 3，其中实验、刚性连接模型、本文模型的前 6 阶振型均分别为绕 z 轴旋转、绕 y 轴旋转、绕 x 轴旋转、沿 x 轴平动、沿 y 轴平动、沿 z 轴平动。在拧紧力矩 30 N·m 工况下，试件的实验频率响应函数如图 5 所示。在每个螺栓均分别承受拧紧力矩 30、60、90 N·m 工况下，两种模型识别固有频率与实验固有频率的比较如表 4 所示。在拧紧力矩 90 N·m 工况下，刚性连接模型前 6 阶固有频率皆大于实验前 6 阶固有频率，其相对误差在 17.5% ~23.5% 之间。本文模型的相对误差在 -16.8% ~16.8% 之间。

表 3 两种模型振型与实验振型的比较

Tab. 3 Comparison of two models' vibration shapes with experimental results

阶号	实验振型	刚性连接模型振型	本文模型振型
1			
2			
3			
4			

续表 3

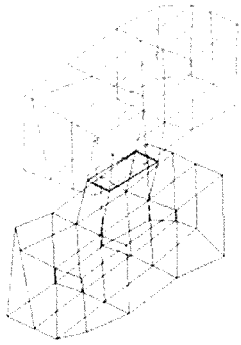
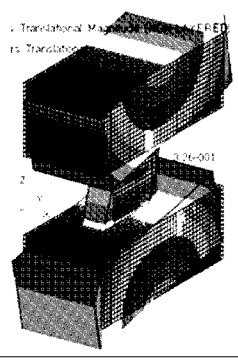
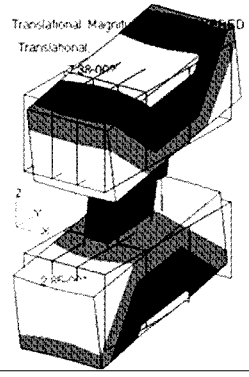
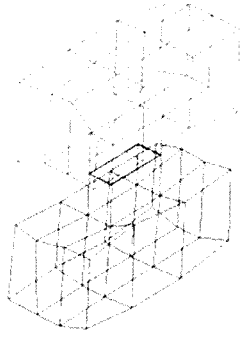
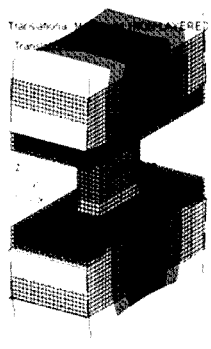
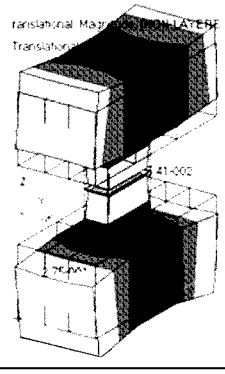
阶号	实验振型	刚性连接模型振型	本文模型振型
5			
6			

表 4　两种模型固有频率与实验固有频率的比较

Tab. 4　Comparison of two models' natural frequencies with experimental results

拧紧力矩 T/N·m	各种方法结果	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
30	实验固有频率/Hz	530.940 3	729.206 5	1 045.317 3	2 317.619 0	2 366.416 4	2 898.175 8
	本文固有频率/Hz	571.69	643.57	1 063.00	2 139.90	2 360.10	3 238.20
	相对误差/%	7.675 0	−11.743 8	1.691 6	−7.668 2	−0.266 9	11.732 4
60	实验固有频率/Hz	542.281 3	781.803 5	1 072.305 8	2 328.038 9	2 407.146 6	2 984.338 6
	本文固有频率/Hz	578.96	665.71	1 097.00	2 170.60	2 433.90	3 427.40
	相对误差/%	6.763 8	−14.849 4	2.302 9	−6.762 7	1.111 4	14.846 2
90	实验固有频率/Hz	548.972 5	814.632 4	1 083.150 9	2 330.820 7	2 425.819 6	3 021.670 8
	刚性固有频率/Hz	660.01	959.02	1 326.20	2 738.00	2 994.90	3 641.50
	本文固有频率/Hz	582.87	677.75	1 115.40	2 187.00	2 474.90	3 529.40
	刚性连接误差/%	20.226 4	17.724 3	22.439 1	17.469 4	23.459 3	20.512 8
	相对误差/%	6.174 7	−16.803 0	2.977 3	−6.170 4	2.023 3	16.802 9

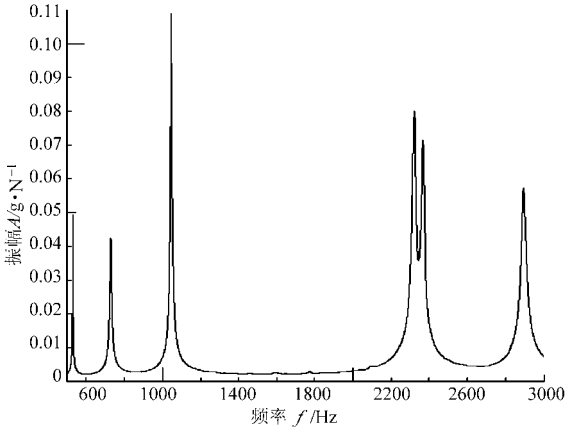


图 5　试件的实验频率响应函数

Fig. 5　Experimental FRF of test specimen

5　结束语

本文的相对误差比文献[12]大，因为结合部弹簧模型的各弹簧相互独立，无法模拟它们之间的相互作用，即忽略各粘弹性单元之间及粘弹性单元的坐标之间的耦合关系，而结合部的法、切向特性相互影响，模态包含振型、有阻尼固有频率、阻尼比，本文未计及阻尼，而文献[12]考虑了阻尼。若要减小相对误差，可引进虚材料[14]和较完整的赫兹接触理论[15~16]研究结合部。

参 考 文 献

1 兰国生,张学良,丁红钦,等. 基于分形理论的结合面改进接触模型[J]. 农业机械学报,2011,42(10):217~223,229.
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified contact model of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(10):217~223,229. (in Chinese)

2 田红亮,朱大林,秦红玲. MB 模型计算原理的修正[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2011,33(3):68~73.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Modification of MB model's algorithm principle[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2011,33(3):68~73. (in Chinese)

3 Yan W, Komvopoulos Kyriakos. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7):3 617~3 624.

4 Wang S, Komvopoulos Kyriakos. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part Ⅰ—elastic contact and heat transfer analysis[J]. ASME Journal of Tribology, 1994,116(4):812~823.

5 刘正君. MATLAB 科学计算与可视化仿真[M]. 北京:电子工业出版社,2009:180~182.

6 田红亮,方子帆,朱大林,等. 固定接触界面切向静弹性刚度问题研究[J]. 应用力学学报,2011,28(5):458~464.
Tian Hongliang, Fang Zifan, Zhu Dalin, et al. Investigation on tangential static elastic stiffness of fixed contact interface[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011,28(5):458~464. (in Chinese)

7 陈进,周韩,赵湛,等. 基于 EDEM 的振动种盘中水稻种群运动规律研究[J]. 农业机械学报,2011,42(10):79~83,100.
Chen Jin, Zhou Han, Zhao Zhan, et al. Analysis of rice seeds motion on vibrating plate using EDEM[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(10):79~83,100. (in Chinese)

8 温淑花,张学良,文晓光,等. 结合面切向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. 农业机械学报,2009,40(12):223~227.
Wen Shuhua, Zhang Xueliang, Wen Xiaoguang, et al. Fractal model of tangential contact stiffness of joint interfaces and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(12):223~227. (in Chinese)

9 Jiang Shuyun, Zheng Yunjian, Zhu Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory[J]. ASME Journal of Tribology, 2010,132(1):011401-1~011401-7.

10 Majumdar A, Tien C L. Fractal network model for contact conductance[J]. ASME Journal of Heat Transfer, 1991,113(3): 516~525.

11 Yang J, Komvopoulos Kyriakos. A mechanics approach to static friction of elastic-plastic fractal surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 2005,127(2):315~324.

12 田红亮,朱大林,秦红玲,等. 结合部法向载荷解析解修正与定量实验验证[J]. 农业机械学报,2011,42(9):213~218.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling, et al. Modification of normal load's analytic solutions for joint interface and quantitative experimental verification[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(9): 213~218. (in Chinese)

13 米良,殷国富,孙明楠,等. 基于结合部动力学特性的立柱-主轴系统动力学模型研究[J]. 农业机械学报,2011, 42(12):202~207.
Mi Liang, Yin Guofu, Sun Mingnan, et al. Column-spindle system dynamic model based on dynamic characteristics of joints [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(12):202~207. (in Chinese)

14 Tian Hongliang, Li Bin, Liu Hongqi, et al. A new method of virtual material hypothesis-based dynamic modeling on fixed joint interface in machine tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2011,51(3):239~249.

15 田红亮,朱大林,方子帆,等. 赫兹接触 129 年[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2011,33(6):61~71.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Fang Zifan, et al. 129 years of Hertz contact[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2011,33(6):61~71. (in Chinese)

16 田红亮,赵春华,朱大林,等. 弹塑性三维各向异性分形表面的接触分析[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2012, 34(1):69~73.
Tian Hongliang, Zhao Chunhua, Zhu Dalin, et al. Contact analysis of elastoplastic three-dimensional anisotropic fractal surfaces[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012,34(1): 69~73. (in Chinese)