

# Delta 并联机器人弹性动力学研究\*

韩亚锋 马履中 吴伟光 陈修祥

(江苏大学机械工程学院, 镇江 212013)

**【摘要】** 采用有限元理论建立 Delta 并联机器人柔性构件的运动微分方程, 结合机构的运动特点, 规定了结点位移的方向, 得到机构系统的动力学模型。将机构的真实运动看作名义运动与弹性振动的叠加, 同时将动平台的位置和方向误差看作名义运动的摄动, 得出动平台位形误差与结点位移的关系方程。在实例中, 综合考虑重力、惯性力及阻尼共同作用下的动力响应, 得到机构模态频率在工作空间的特性, 对动平台的 6 维误差进行了全面评估。

**关键词:** 并联机器人 弹性动力学 有限元

**中图分类号:** TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2011)10-0197-06

## Elastic Dynamics Analysis of Delta Parallel Robot

Han Yafeng Ma Lüzhong Wu Weiguang Chen Xiuxiang

(School of Mechanical Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

### Abstract

The differential equation of motion of the Delta parallel robot flexible component was established by the finite element theory, the mechanism's dynamics model was gained by combining the kinematic characteristics and specifying the direction of the node displacement. The real motion of mechanism was regarded as the superposition of the nominal motion and elastic vibration. The position and direction error of the moving platform was regarded as the perturbation of nominal motion. The relation equation of configuration error and node displacement of moving platform was obtained. In the example, the characteristic of modal frequency of mechanism in the workspace was gained by considering the gravity, inertial force and damping dynamic response under the action. The 6-D error of the moving platform was evaluated comprehensively.

**Key words** Parallel robot, Elastic dynamics, Finite element

### 引言

高速精密和轻型化是机器人技术发展的方向, 然而轻型化增加了构件的柔度, 高速增大了构件的惯性激振力, 使构件弹性变形增大, 导致机构真实运动与期望运动之间产生误差, 严重影响了机构的工作精度。为了设计高精度并联机构, 就必须考虑机构运动过程对其动力学性能的影响, 得出动态误差的变化规律。国内外许多学者对多种构型的并联机构进行了弹性动力学分析<sup>[1-4]</sup>, 基于动力学性能实现了机构的优化设计, 得到期望的模态频率特性和

阻尼特性<sup>[5-8]</sup>, 对应用于精密作业的并联机构, 还采用了振动控制技术, 有效地抑制了机构的弹性振动<sup>[9-13]</sup>。本文采用有限元理论建立 Delta 并联机器人弹性振动的动力学模型, 研究弹性振动引起的动平台平动误差和方向误差, 对机构的 6 维误差进行全面评估。

### 1 杆单元弹性振动有限元模型

Delta 型并联机器人由上面的动平台  $C_1C_2C_3$  和下面的基础平台  $A_1A_2A_3$  构成, 如图 1 所示。上、下平台都是等边三角形, 它们之间以 3 条完全相同的

收稿日期: 2010-11-16 修回日期: 2011-01-24

\* 国家自然科学基金资助项目(50575067)和国家高技术研究发展计划(863 计划)资助项目(2008AA040205)

作者简介: 韩亚锋, 博士生, 主要从事机器人运动学、动力学研究, E-mail: hanyafengky@163.com

通讯作者: 马履中, 教授, 博士生导师, 主要从事智能机械与机器人研究, E-mail: mlz@ujs.edu.cn

支链连接,每一个支链与基础平台用转动副连接用作机构的输入,每条支链都由一定长杆和一个平行四边形机构组成,这3处转动副轴线相互平行,消除了运动平台的3个转动自由度而保留了3个纯粹平动自由度。

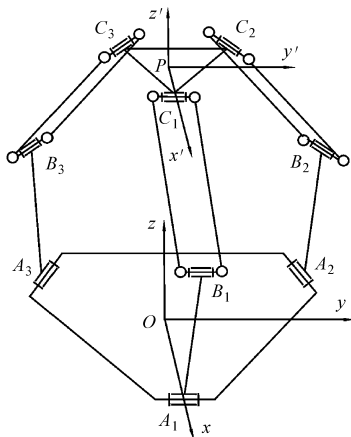


图1 Delta型并联机构运动简图

Fig.1 Kinematic diagram of Delta parallel mechanism

将机构基础平台及动平台看作刚体,其余构件都处理成柔性杆单元,各杆都作平面运动,其动力学性质是同时承受轴向和纵向激振力作纵向和横向振动,在线性弹性范围内,两种振动之间是不耦合的。

在单元上固连局部坐标系,左、右两端的结点编号分别用*i*和*j*表示,在纵向振动和横向振动同时存在的情况下,每个节点的位移有纵向位移*u*、横向位移*v*和转角*θ*,如图2所示,用矩阵表示单元位移

$$q^{(e)} = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T$$

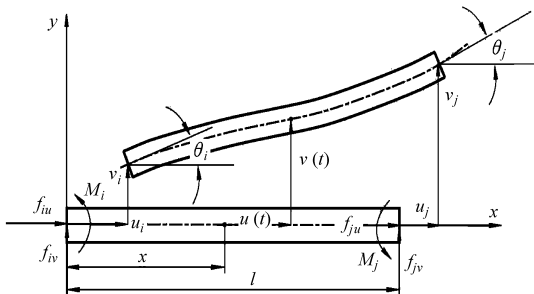


图2 单元位移及广义力

Fig.2 Element displacement and generalized force

单元任意截面的纵向位移*u(x,t)*和横向位移*v(x,t)*可利用其节点位移进行插值得到

$$\begin{cases} u(x,t) = N_{iu}(x)u_i(t) + N_{ju}(x)u_j(t) \\ v(x,t) = N_{iv}(x)v_i(t) + N_{i\theta}(x)\theta_i(t) + \\ N_{jv}(x)v_j(t) + N_{j\theta}(x)\theta_j(t) \end{cases}$$

式中 *t*——时间 *N(x)*——差值型函数

每个轴向位移的插值函数只有两个边界条件,只能取成*x*的线性函数,横向位移的插值函数都有4个边界条件,所以取成*x*的3次多项式。

梁单元的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x)v''(x,t)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA(x)u'(x,t)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA(x) \left( u'(x,t) + \frac{v''(x,t)^2}{2} \right) v''(x,t)^2 dx \quad (1)$$

式中 *E*——材料弹性模量

*A(x)*——梁单元截面面积函数

*J(x)*——梁单元截面惯性矩函数

*l*——杆单元长度

式(1)右边前两项分别表示弯曲和拉、压应变能,第3项是考虑横向位移引起的拉、压应变能。有限元法在推导单元运动方程时忽略了横向位移引起的拉、压应变能,将

$$u'(x,t) = \sum_{i=1}^2 N'_{iu}(x)u_i(t)$$

$$v'(x,t) = \sum_{j=1}^4 N'_{jv}(x)v_j(t)$$

代入式(1),*U*是单元广义坐标的二次函数,代入拉格朗日方程并对广义坐标求导后,所得的单元运动方程是关于广义坐标的线性方程组

$$m^{(e)} \ddot{q}^{(e)} + c^{(e)} \dot{q}^{(e)} + k^{(e)} q^{(e)} = f^{(e)} + g^{(e)} \quad (2)$$

其中  $f^{(e)} = [f_{iu} \quad f_{iv} \quad M_i \quad f_{ju} \quad f_{jv} \quad M_j]^T$

式中 *m<sup>(e)</sup>*、*c<sup>(e)</sup>*、*k<sup>(e)</sup>*——单元质量矩阵、单元阻尼矩阵和单元刚度矩阵

*f<sup>(e)</sup>*——相邻单元之间作用力

*g<sup>(e)</sup>*——对应于各广义坐标的激振力

因而纵向和横向振动可以简单叠加。假如考虑由梁的横向位移引起的拉压应变,式(2)中第3项则是广义坐标的三次和四次函数,代入拉格朗日方程并对广义坐标求导后,所得的运动方程中,将会出现含有广义坐标的二次和三次项,单元运动方程变成广义坐标的非线性方程组。为了简化,通常只考虑变形能中起主导作用的前两项。

*f<sup>(e)</sup>*对于结构系统来说是内力,所以在系统运动方程中不出现。各单元都受到重力和惯性力的作用,除此以外,输入杆在与基础平台连接的结点处,作用有约束反力和驱动力矩,从动连杆在与动平台连接的结点处,受到动平台的反作用力,对系统来说它们都是外力。对任意力*g(x,t)*,它引起各广义坐标的激振力为

$$\begin{cases} g_{\gamma u}^{(e)} = \int_0^l N_{\gamma u}(x)g_x(x,t)dx \\ g_{\gamma v}^{(e)} = \int_0^l N_{\gamma v}(x)g_y(x,t)dx \quad (\gamma = i, j) \\ g_{\gamma \theta}^{(e)} = \int_0^l N_{\gamma \theta}(x)g_y(x,t)dx \end{cases}$$

## 2 机构系统运动微分方程

系统广义坐标可以按下面的原则设置,如图 3 所示,假定基础平台是刚性的,因而与基础平台连接的结点  $A_r$  上只有转角位移  $\theta_i$ ,相邻单元在以转动副连接的结点  $B_r$  上,具有相同的纵向位移和横向位移,但两个单元分属不同的构件,因而具有不同的转角  $\theta_i^{(2)}$ 、 $\theta_j^{(1)}$ 。在与动平台连接的结点  $C_r$  上,具有纵向位移  $u_j^{(2)}$ 、横向位移  $v_j^{(2)}$  和转角  $\theta_j^{(2)}$ 。

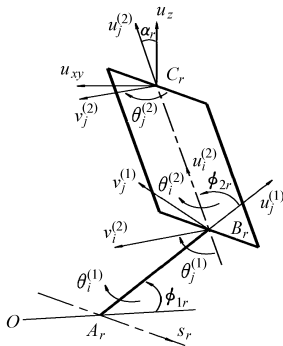


图 3 结点位移与系统广义坐标

Fig. 3 Nodal displacement and system generalized coordinates

在单元的运动方程式中,其结点位移是定义在局部坐标系上的,对于不同单元共有的结点,它在各单元的位移方向具有不同的定义,在将单元运动方程合成系统的运动方程时,就要给每个结点的位移进行统一定义。结点  $B_r$  处的 2 个线位移方向分别规定为沿杆  $A_r B_r$  轴线及杆轴线的垂直方向,忽略转动关节的变形,则平行四边形的两侧构件的端点分别与  $B_r$  和  $C_r$  的位移相同,结点  $C_r$  处的 2 个线位移分别规定为  $z$  坐标方向和支链运动平面  $A_r B_r C_r$  与动平台平面交线方向。

对于杆单元  $A_r B_r$ ,结点在单元坐标系的位移  $u_j^{(1)}$ 、 $v_j^{(1)}$  与规定的方向一致,不需要坐标变换;而对于平行于  $B_r C_r$  的杆单元,结点  $B_r$ 、 $C_r$  在单元坐标系的位移  $u_i^{(2)}$ 、 $v_i^{(2)}$  及  $u_j^{(2)}$ 、 $v_j^{(2)}$  与规定的位移方向不一致,需要将其变化到规定的方向

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{R}_r \mathbf{q} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{q}^{(e)} = [u_i^{(2)} \quad v_i^{(2)} \quad \theta_i^{(2)} \quad u_j^{(2)} \quad v_j^{(2)} \quad \theta_j^{(2)}]^T$

$$\mathbf{q} = [u_j^{(1)} \quad v_j^{(1)} \quad \theta_i^{(2)} \quad u_z \quad u_{xy} \quad \theta_j^{(2)}]^T$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \cos\phi_{2r} & \sin\phi_{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi_{2r} & \cos\phi_{2r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_r & \sin\alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_r & \cos\alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_r = \phi_{1r} + \phi_{2r} - \frac{\pi}{2}$$

式中  $\mathbf{q}^{(e)}$ ——单元位移列阵

$\mathbf{q}$ ——系统规定的单元位移列阵

$\mathbf{R}_r$ ——分支  $r$  相应的变化矩阵

$\phi_{1r}$ 、 $\phi_{2r}$ ——关节  $A_r$  和  $B_r$  的转角

$\alpha_r$ —— $B_r C_r$  与  $z$  轴正向的夹角

将式(3)对时间求导,由于机构弹性分析采用瞬时结构,求导时,将变换矩阵看作常数矩阵

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{R}_r \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{R}_r \ddot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)并左乘  $\mathbf{R}_r^T$  得

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} \mathbf{q} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$$

其中

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{m}^{(e)} \mathbf{R}_r \quad \mathbf{k} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{R}_r$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{c}^{(e)} \mathbf{R}_r \quad \mathbf{f} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{f}^{(e)} \quad \mathbf{g} = \mathbf{R}_r^T \mathbf{g}^{(e)}$$

式中  $\mathbf{m}$ 、 $\mathbf{c}$ 、 $\mathbf{k}$ ——单元的当量质量矩阵、当量阻尼矩阵和当量刚度矩阵

机构每个分支有 8 个广义坐标,为了建立系统运动方程,将系统全部位移统一编号

$$\mathbf{x} = \{q_1, q_2, \dots, q_{22}\}^T$$

将单元运动方程装配成统一编号下的系统运动微分方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{G} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ ——系统质量矩阵、系统阻尼矩阵和系统刚度矩阵

$\mathbf{G}$ ——系统广义力列向量

## 3 机构运动误差分析

与刚性机构的名义运动相比,弹性振动引起的位移很小,因而机构的真实运动可以看作是名义运动和弹性振动的叠加,对于结点  $C_r$  有

$$\begin{bmatrix} x'_{cr} \\ y'_{cr} \\ z'_{cr} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{cr} \\ y_{cr} \\ z_{cr} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{cr} \\ \Delta y_{cr} \\ \Delta z_{cr} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x''_{cr} \\ y + y''_{cr} \\ z + z''_{cr} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{cr} \\ \Delta y_{cr} \\ \Delta z_{cr} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $x'_{cr}$ 、 $y'_{cr}$ 、 $z'_{cr}$ ——机构真实运动下结点  $C_r$  在参考系中的坐标

$x_{cr}$ 、 $y_{cr}$ 、 $z_{cr}$ ——机构名义运动下结点  $C_r$  在参考系中的坐标

$\Delta x_{cr}$ 、 $\Delta y_{cr}$ 、 $\Delta z_{cr}$ ——结点  $C_r$  的弹性振动位移

$x''_{cr}$ 、 $y''_{cr}$ 、 $z''_{cr}$ —— $C_r$  在动坐标系中的坐标

另一方面,机构振动引起动平台中心产生  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向位置误差  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  及绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的转角误差  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_z$ ,即认为将动平台中心平移  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ ,再依次绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴旋转  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_z$ 。

$$\begin{bmatrix} x'_{cr} \\ y'_{cr} \\ z'_{cr} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x + \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & y + \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & z + \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z & 0 & 0 \\ \varepsilon_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_{cr} \\ y''_{cr} \\ z''_{cr} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y & x + \Delta x \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x & y + \Delta y \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 & z + \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_{cr} \\ y''_{cr} \\ z''_{cr} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)忽略了高阶小量  $\varepsilon_x \varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_x \varepsilon_z$ 、 $\varepsilon_y \varepsilon_z$ 、 $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ ，由式(7)减去式(6)得动平台姿态与结点  $C_r$  位移的关系式为

$$\begin{cases} -\varepsilon_z y''_{cr} + \varepsilon_y z''_{cr} + \Delta x = \Delta x_{cr} \\ \varepsilon_z x''_{cr} - \varepsilon_x z''_{cr} + \Delta y = \Delta y_{cr} \\ \varepsilon_x y''_{cr} - \varepsilon_y x''_{cr} + \Delta z = \Delta z_{cr} \end{cases} \quad (r=1,2,3) \quad (8)$$

对系统进行动力响应分析,可以得到结点  $C_r$  的弹性位移  $u_z^{(r)}$  和  $u_{xy}^{(r)}$ ,将  $\Delta z_{cr} = u_z^{(r)}$  代入式(8)中的第3式,得关于  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  和  $\Delta z$  的线性代数方程,可求得  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  和  $\Delta z$ ,代入式(8)前两式,进行平方和,并代入关系  $\Delta x_{cr}^2 + \Delta y_{cr}^2 = u_{xy}^{(r)2}$  得

$$\begin{aligned} R_0 \varepsilon_z^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 - 2y''_{cr} \varepsilon_z \Delta x + 2x''_{cr} \varepsilon_z \Delta y - \\ 2(\varepsilon_y y''_{cr} + \varepsilon_x x''_{cr}) \varepsilon_z + 2\varepsilon_y z''_{cr} \Delta x - 2\varepsilon_x z''_{cr} \Delta y = \\ u_{xy}^{(r)2} - (\varepsilon_y^2 z_{cr}^2 + \varepsilon_x^2 z_{cr}^2) \quad (r=1,2,3) \quad (9) \end{aligned}$$

解式(9)即可求得动平台位置误差  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  及转角误差  $\varepsilon_z$ 。

为了得到系统式(5)的动力响应,引入正则坐标  $\mathbf{x}_N$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \quad (10)$$

代入式(3),并左乘正则振型矩阵  $\mathbf{A}_N^T$ ,可得正则坐标下的强迫振动方程

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{x}}_N + \mathbf{C}_N \dot{\mathbf{x}}_N + \mathbf{K}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{G}_N \quad (11)$$

其中  $\mathbf{M}_N = \mathbf{A}_N^T \mathbf{M} \mathbf{A}_N = \mathbf{I}$   $\mathbf{C}_N = \mathbf{A}_N^T \mathbf{C} \mathbf{A}_N$

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \quad \mathbf{G}_N = \mathbf{A}_N^T \mathbf{G}$$

式中  $\mathbf{M}_N$ 、 $\mathbf{C}_N$ 、 $\mathbf{K}_N$ ——正则坐标下的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵

$\mathbf{G}_N$ ——正则坐标下的激振力矢量

由于原坐标中的阻尼矩阵  $\mathbf{C}$  恰好与质量矩阵  $\mathbf{M}$  呈正比,所以,  $\mathbf{C}_N$  也为对角矩阵,故式(11)是一组相互独立的二阶线性微分方程式,整理成

$$\ddot{x}_{Nk} + 2\zeta_k p_k x_{Nk} + p_k^2 x_{Nk} = G_{Nk} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (12)$$

其中  $\zeta_k = n_k/p_k$   $n_k = \frac{1}{2} c_{Nkk}$

式中  $p_k$ ——系统第  $k$  阶固有频率

$c_{Nkk}$ ——阻尼矩阵  $\mathbf{C}_N$  对角线上的元素

$\zeta_k$ ——第  $r$  阶正则振型的相对阻尼系数

由于微分方程式(12)中的系数  $\zeta_k$ 、 $p_k$  及  $G_{Nk}$  都是时间  $t$  的极其复杂的函数,因而应按时间分段计算,在每一微小时间间隔,这些系数都看作常数,每个时段都从零开始计时,则有

$$\begin{aligned} x_{Nk}(t) = e^{-\zeta_k p_k t} \left[ \frac{1}{p'_k} (\dot{x}_{Nk0} + \zeta_k p_k x_{Nk0}) \sin p'_k t + \right. \\ \left. x_{Nk0} \cos p'_k t + \frac{1}{p'_k} \int_0^t G_{Nk} e^{\zeta_k p_k \tau} \sin p'_k (t - \tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

其中  $p'_k = \sqrt{p_k^2 - n_k^2}$   $\mathbf{x}_{N0} = \mathbf{A}_N \mathbf{M} \mathbf{x}_0$   $\dot{\mathbf{x}}_{N0} = \mathbf{A}_N \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0$   
式中  $x_{Nk0}$ 、 $\dot{x}_{Nk0}$ ——正则坐标及速度的初始值,可由系统广义坐标及速度的初始值  $x_{k0}$ 、 $\dot{x}_{k0}$  求出

## 4 应用实例

给定机构结构参数:基础平台外接圆半径  $R = 1.04$  m,动平台外接圆半径  $R_0 = 0.4$  m,输入杆长度  $l_1 = 0.75$  m,等效杆长度  $l_2 = 0.58$  m,杆  $A_r B_r$  及平行四边形结构的两侧杆均为矩形截面,其宽度为  $b_1 = 45$  mm,  $b_2 = 30$  mm,高度尺寸为  $h_1 = h_2 = 60$  mm。构件材料的物理参数:密度  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>,弹性模量  $E = 200$  GPa。

机构工作空间为3个分支子空间圆环面的交集,3环中心线交于一点  $G(0,0,0.96)$ ,其工作空间内最大内切球体,中心也位于该点,半径为等效杆长度  $l_2$ 。以动平台在水平面和铅垂面的圆周运动分析机构的动力学性能分别为

$$\begin{cases} x = 0.24 \cos 12t \\ y = 0.24 \sin 12t \\ z = 0.96 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0.24 \sin 12t \\ z = 0.24 \cos 12t + 0.96 \end{cases}$$

机构低阶振动特性对其动力学性能的影响占有主导地位,在所给运动条件下,机构前6阶模态频率变化规律如图4、5所示。结果显示,动平台在水平面运动时模态频率变化幅度小,且当动平台中心运动到与  $x$  轴呈  $60^\circ$  角的整数倍时,机构系统的有多组相等的模态频率,对应的主振型具有多样性。当动平台在铅垂面运动时,各节模态频率随机构位姿变化幅度大,在工作空间的下半部模态频率最小,机构动刚度最低。

图6和图7为动平台的位置和方向误差,由图可见动平台在水平面内运动时,主要是绕  $z$  轴转动误差和沿  $x$ 、 $y$  平动误差,且各种误差变化范围小,当动平台在铅垂面运动时,动平台的位置和方向误差明显比水平面运动时大得多,尤其在工作空间的底部,各种误差达到峰值。

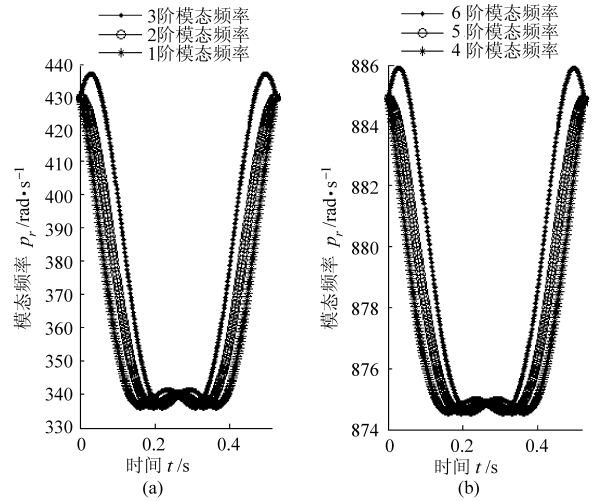
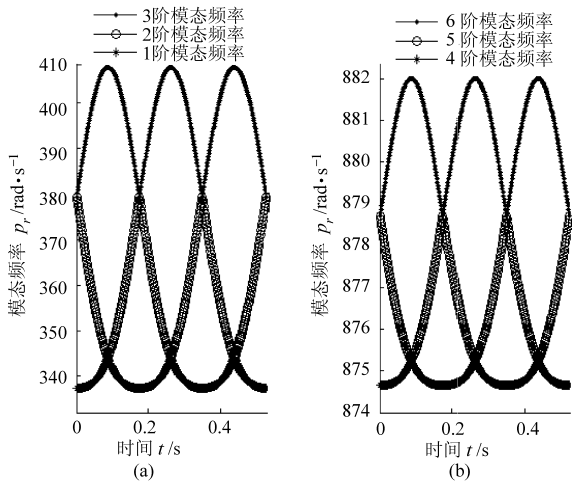


图 4 动平台在水平面运动时模态频率的变化曲线

图 5 动平台在铅垂面运动时模态频率的变化曲线

Fig. 4 Change curve of modal frequency of the moving platform of movement on the horizontal plane

Fig. 5 Change curve of modal frequency of the moving platform of movement on the vertical plane

(a) 1~3 阶模态频率 (b) 4~6 阶模态频率

(a) 1~3 阶模态频率 (b) 4~6 阶模态频率

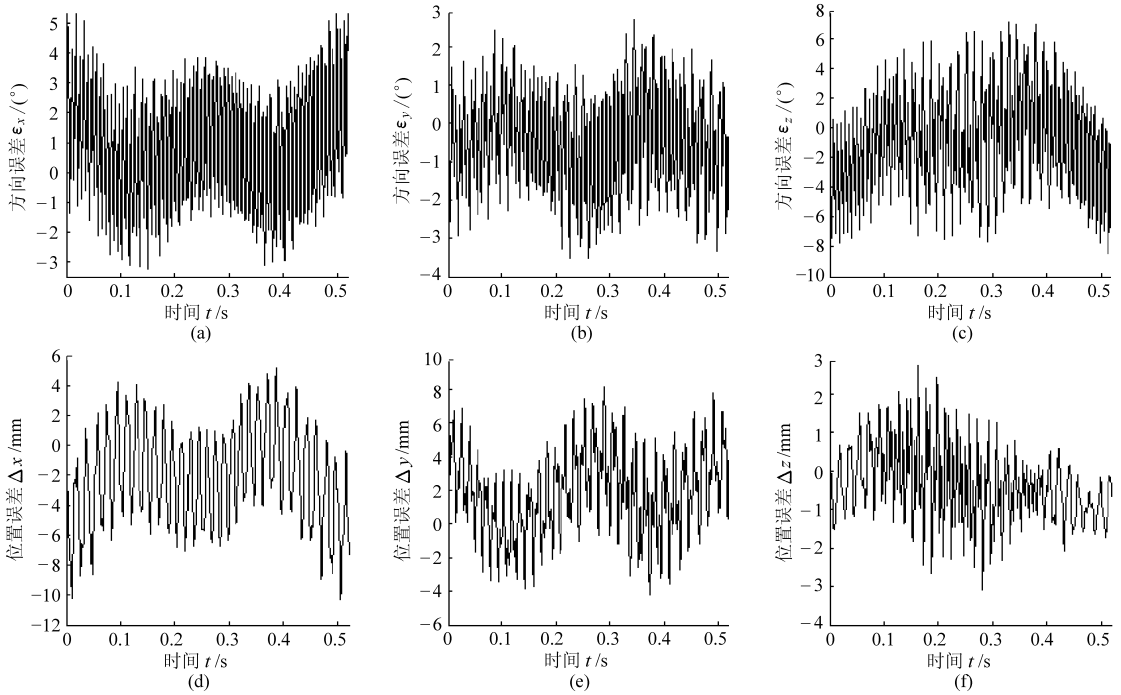
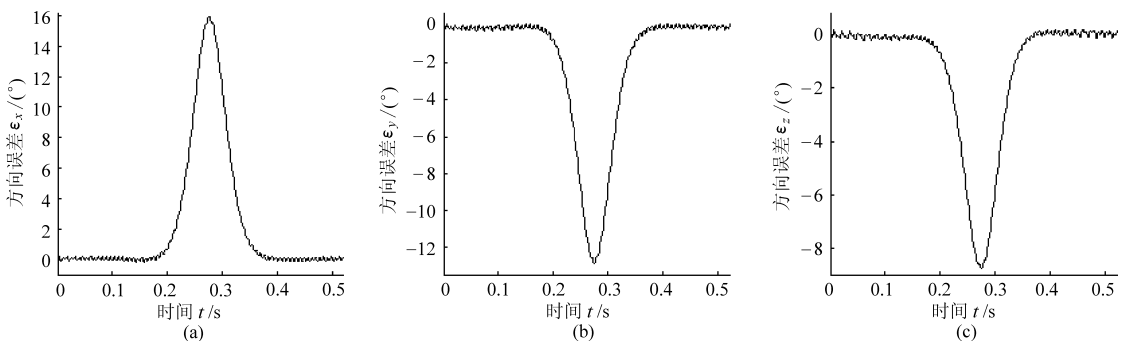


图 6 动平台在水平面运动时的位置和方向误差

Fig. 6 Position and direction error of the moving platform on the horizontal plane

(a) 绕 x 轴转角误差 (b) 绕 y 轴转角误差 (c) 绕 z 轴转角误差

(d) x 坐标方向位置误差 (e) y 坐标方向位置误差 (f) z 坐标方向位置误差



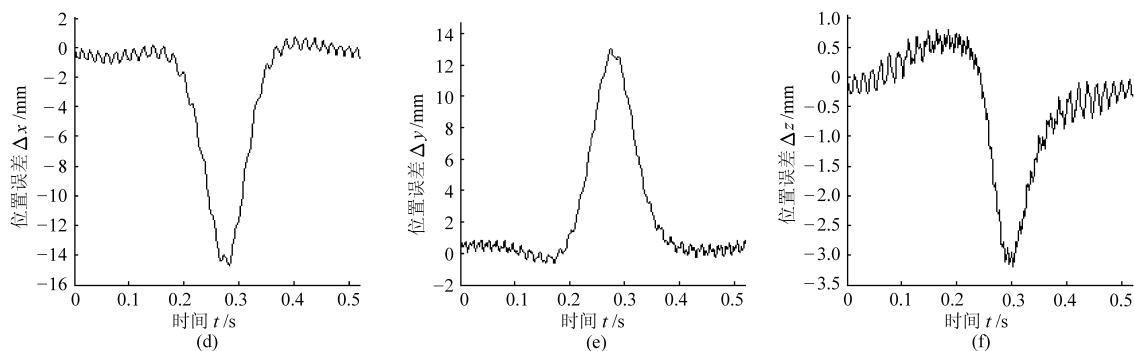


图7 动平台在铅垂面运动时的位置和方向误差

Fig. 7 Position and direction error of the moving platform on the vertical plane

(a) 绕  $x$  轴转角误差 (b) 绕  $y$  轴转角误差 (c) 绕  $z$  轴转角误差  
(d)  $x$  坐标方向位置误差 (e)  $y$  坐标方向位置误差 (f)  $z$  坐标方向位置误差

## 5 结束语

利用有限元方法建立了 Delta 型并联机器人弹性动力学模型,基于机构逆向运动学,研究了机构的动态响应。结果表明,构件的弹性变形对机构工作精度的影响是一项不可低估的因素。机构在其工作

空间的上半部具有较好的动力学性能,而在工作空间的最下方附近的区域,动力学性能最差,在实际应用中,应注意避免使用这部分工作空间。对于轨迹精度要求较高的作业要求,有必要采用振动控制技术,以抑制机构的弹性振动。

## 参 考 文 献

- 1 Yao G Z, Yap F F, Chen G, et al. MR damper and its application for semi-active control of vehicle suspension system[J]. *Mechatronics*, 2002, 12(7): 963 ~ 973.
- 2 韩清凯,于涛,杜戊,等. 六杆并联机器人模态实验与动力学特性分析[J]. *振动工程学报*, 2003, 16(3): 349 ~ 353.  
Han Qingkai, Yu Tao, Du Wu, et al. Experimental modal measurement and dynamical analysis for 6 link parallel robot[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(3): 349 ~ 353. (in Chinese)
- 3 杜兆才,余跃庆,张绪平. 平面柔性并联机器人动力学建模[J]. *机械工程学报*, 2007, 43(9): 96 ~ 101.  
Du Zhaocai, Yu Yueqing, Zhang Xuping. Dynamic modeling of planar flexible parallel manipulators[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43(9): 96 ~ 101. (in Chinese)
- 4 Kang B, Mills J K. Dynamic modeling of structure-ally-flexible planar parallel manipulator[J]. *Robotica*, 2002, 20(3): 329 ~ 339
- 5 边宇枢,高志慧,负超. 基于结构特征的柔性机器人动态性能优化研究[J]. *振动工程学报*, 2009, 22(1): 36 ~ 39.  
Bian Yushu, Gao Zhihui, Yun Chao. Dynamic performance optimization for flexible manipulators based on their structure features[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2009, 22(1): 36 ~ 39. (in Chinese)
- 6 于靖军,周强,毕树生,等. 基于动力学性能的全柔性机构优化设计[J]. *机械工程学报*, 2003, 39(8): 32 ~ 36.
- 7 何广平,谭晓兰,张向慧,等. 平面全柔性 3-DOF 过驱动并联机构的最优综合[J]. *机器人*, 2006, 28(6): 623 ~ 628.
- 8 Yue S G. Weak-vibration configurations for flexible robotic manipulators with kinematic redundancy [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, 35(2): 165 ~ 178.
- 9 吴军,李铁民,唐晓强. 平面并联机构的残余振动控制[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(11): 49 ~ 53.  
Wu Jun, Li Tiemin, Tang Xiaoliang. Residual vibration control of planar parallel mechanism [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(11): 49 ~ 53. (in Chinese)
- 10 朱伟,马履中,吴伟光,等. 基于三平移并联机构的三维减振平台建模与仿真[J]. *农业机械学报*, 2008, 39(1): 142 ~ 146.
- 11 杨宇,郑淑涛,韩俊伟. 基于动力学的 Stewart 平台振动控制策略研究[J]. *农业机械学报*, 2010, 41(6): 20 ~ 24.  
Yang Yu, Zheng Shutao, Han Junwei. Stewart platform vibration control strategy based on dynamics[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2010, 41(6): 20 ~ 24. (in Chinese)
- 12 Kozdk K, Ebert-Uphoff I, Singhose W. Locally linearized dynamic analysis of parallel manipulators and application of input shaping to reduce vibrations [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(1): 156 ~ 168.
- 13 Motoji Y, Noritaka Y, Akira M. Trajectory control of incompletely restrained parallel wire-suspended mechanism based on inverse dynamics[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2004, 20(5): 840 ~ 850.