

# 基于内积运算与迭代算法的密集模态阻尼识别<sup>\*</sup>

赵晓丹 张中业 骆 英

(江苏大学汽车与交通工程学院, 镇江 212013)

**【摘要】** 密集模态存在模态干涉, 导致阻尼识别困难, 提出内积运算与迭代算法相结合诊断阻尼比。首先, 运用频谱细化的傅里叶变换(FFT-FT), 得频谱峰值最大对应的共振频率; 然后, 构造指数函数, 与响应信号作内积运算, 根据柯西-施瓦茨不等式定理, 当内积模取得极大值时, 可优化搜索到衰减系数, 得出幅值及相位。由此获得某一模态信号的估计, 从总响应信号中减去估计信号。重复上述诊断步骤, 形成迭代, 消除模态干涉。通过算例和试验验证了该方法的有效性, 识别结果准确。

**关键词:** 密集模态 阻尼 识别 内积 迭代

**中图分类号:** TB123      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1298(2011)04-0206-05

## Damping Identification for Closely Spaced Modes Based on Inner Product Calculation and Iterative Algorithm

Zhao Xiaodan Zhang Zhongye Luo Ying

(School of Automobile and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

### Abstract

Damping estimation is difficult as a result of modal interference existing in closely spaced modes, a combinational method of inner product calculation and iterative algorithm was presented. Firstly, resonant frequency of the topmost spectral peak was counted by the application of FFT-FT. Secondly, inner product was conducted between response signal and the constructed exponential function. According to the theorem of Cauchy-Schwarz inequality, the attenuation coefficient was achieved by calculating the maximum of the inner product module, meanwhile, the amplitude and phase of the corresponding modal signal were obtained. One modal signal could be estimated from the above calculations. Thirdly, the estimated signal was subtracted from the overall response signal, and then estimated the next modal signal. In this way, an iteration process was formed by repeating the above diagnosing procedures, which could solve the modal interference. Both simulation calculation and experiment were conducted to validate the method.

**Key words** Closely spaced modes, Damping, Identification, Inner product, Iteration

### 引言

阻尼在机械振动、噪声控制和结构模态等工程领域有重要作用, 受测量方法、实验参数和噪声干扰的影响, 阻尼诊断误差较大, 提高阻尼比识别精度一直是学者追求的目标<sup>[1]</sup>。半功率带宽法<sup>[2]</sup>是最常用的方法, 但受限于离散傅里叶变换的频率分辨率,

不能识别小阻尼; 半功率带宽改进法<sup>[3]</sup>通过频谱细化来提高分辨率, 但是存在截断误差, 小阻尼的识别误差仍然较大。文献[4]提出基于内积模极值诊断小阻尼, 具有新颖性, 与半功率带宽方法相反, 该方法识别小阻尼精度高; 但是在阻尼增加时, 负频率项的影响增大, 诊断精度降低。

密集模态的产生取决于两个因素: 一是模态之

间固有频率接近;二是阻尼比较大。反映到频域,表现为谱峰的相互叠加。近年来,加逆衰减窗<sup>[5]</sup>、小波变换<sup>[6-8]</sup>和 Hilbert-Huang 变换<sup>[9]</sup>等方法应用于密集模态的阻尼识别。加逆衰减窗以各个模态衰减系数相差不大为前提条件。直接利用小波变换识别密集模态,存在因模态混叠导致模态参数识别不准确的问题<sup>[5]</sup>。Hilbert-Huang 变换需要用到模态经验分解(EMD),但是 EMD 的包络线计算存在过冲和欠冲,数据端点处理困难,存在提取模态不完整以及出现“虚假模态”的问题<sup>[10-11]</sup>。

密集模态阻尼识别是一个难点问题,提出基于内积运算和迭代运算相结合的方法,探讨迭代算法削减相近模态的交叉干涉,提取各阶模态的“纯模态”。通过算例验证本文方法的准确性,考察噪声干扰;进而将该方法运用于悬臂梁阻尼识别试验。

## 1 内积运算诊断阻尼的原理

单自由度系统作为最基本的振动形式,能够揭示很多振动特性。有阻尼振动系统的自由衰减响应为

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \theta) = \frac{A}{2} e^{-nt} e^{j\theta} e^{j\omega_d t} + \frac{A}{2} e^{-nt} e^{-j\theta} e^{-j\omega_d t} \quad (1)$$

其中  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$   $n = \zeta\omega_n$   
 式中  $A$ ——幅值  $\zeta$ ——阻尼比  
 $\omega_n$ ——固有频率  $t$ ——时间  
 $\omega_d$ ——有阻尼固有原频率  $\theta$ ——相位角  
 $n$ ——衰减系数

$x(t)$  由正频率项  $x_z(t) = \frac{A}{2} e^{-nt} e^{j\theta} e^{j\omega_d t}$  和负频率

项  $x_f(t) = \frac{A}{2} e^{-nt} e^{-j\theta} e^{-j\omega_d t}$  两个函数叠加而成,  $x_z(t)$

和  $x_f(t)$  互为共轭。

小阻尼条件下,正频率项和负频率项之间的相关性不强<sup>[4]</sup>。先不考虑负频率项,单独对正频率项进行研究。

利用内积运算度量信号相似性<sup>[12]</sup>,按照正频率项的结构形式,构造指数函数

$$f(t) = e^{-nt} e^{j\omega t} \quad (2)$$

式中  $m$ ——变量,  $m \in \Omega_n, \Omega_n$  为  $n$  的值域

$\omega$ ——变量,  $\omega \in \Omega_{\omega_n}, \Omega_{\omega_n}$  为  $\omega_n$  的值域

将  $x_z(t)$  与  $f(t)$  的归一化函数进行内积运算

$$H = \langle x_z(t), f(t) / \|f(t)\| \rangle = \frac{A}{2} e^{j\theta} \left\langle e^{-nt} e^{j\omega_d t}, \frac{e^{-nt} e^{j\omega t}}{\|e^{-nt} e^{j\omega t}\|} \right\rangle \quad (3)$$

根据柯西-施瓦茨不等式定理:两个向量(函

数)内积的模小于等于各自模之间的乘积,当且仅当两个向量(函数)线性相关时等号成立。因此

$$\|H\| = \|\langle x_z(t), f(t) / \|f(t)\| \rangle\| \leq \|x_z(t)\| \|f(t) / \|f(t)\|\| = \|x_z(t)\| \quad (4)$$

当  $H$  取得最大值  $\|x_z(t)\|$  时,则  $x_z(t)$  与  $f(t)$  线性相关,必有  $m = n, \omega = \omega_d$ 。  $n$  和  $\omega_d$  的识别问题转变成搜索  $\|H\|_{\max}$  的优化问题。

通过3个步骤诊断阻尼比。首先,对  $x(t)$  进行频谱细化的傅里叶变换(FFT-FT),识别出共振频率  $\omega \approx \omega_d$ ,将  $\omega$  代入  $f(t)$ 。然后,通过黄金分割法优化搜索  $\|H\|$  的最大值,得出衰减系数  $m \approx n$ 。同时,将诊断出的  $\omega_d$  和  $n$  代入式(2)、(3),计算  $f(t)$  和  $H$ ,进而得到正频率项的估计

$$\hat{x}_z(t) = \frac{H}{\|f(t)\|} f(t) \quad (5)$$

最后,根据诊断出的固有频率和衰减系数,得出阻尼比

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_d}{n}\right)^2}} \quad (6)$$

在不考虑负频率项影响的情况下,考察上述方法识别阻尼的效果,诊断一系列不同的阻尼比。设信号频率 80 Hz,采样频率 2 000 Hz,采样点数 2 048。计算结果如表 1 所示。

表 1 内积运算识别阻尼比

Tab. 1 Damping ratio estimation using inner product calculation

阻尼比 理论值	不考虑负频率项影响的阻尼比		实际信号阻尼比	
	诊断值	相对误差/%	诊断值	相对误差/%
0.004	0.004 00	0.03	0.004 02	0.47
0.020	0.019 99	0.03	0.020 25	1.24
0.100	0.100 01	0.01	0.111 01	11.01

表 1 结果表明,在不考虑负频率项的条件下,内积运算能够准确识别高、中、低 3 种不同的阻尼比,相对误差都在 1% 以内。但是,实际信号由正频率项和负频率项构成,利用上述方法诊断相应的实际信号,结果见表 1。在小阻尼的情况下,负频率项的影响不大,诊断准确。但是随着阻尼值的增大,识别精度降低,原因在于大阻尼系统负频率项的交叉干扰作用增强,上述方法忽略了负频率项的影响,导致阻尼识别精度下降。

## 2 迭代分离负频率项

为了消除负频率项对信号阻尼诊断的影响,采用迭代算法削减信号中负频率项。首先,根据

式(5)获得正频率项  $x_s(t)$  的估计项  $\hat{x}_s(t)$ 。正、负频率项是共轭关系,可得负频率项  $x_f(t)$  的近似估计  $\hat{x}_f(t)$ 。然后,从响应信号  $x(t)$  中减去  $\hat{x}_f(t)$ ,即

$$x_s(t) = x(t) - \hat{x}_f(t) = x_s(t) + x_f(t) - \hat{x}_f(t) \quad (7)$$

式中  $x_s(t)$ ——正频率项的估计

由式(7)可看出,由于减去了负频率项的估计  $\hat{x}_f(t)$ ,起到削减负频率项干扰的作用。用信号  $x_s(t)$  代替  $x(t)$ ,计算  $\| \langle x_s(t), f(t) / \| f(t) \| \rangle \|_{\max}$ ,再一次诊断参数  $\omega_d$  和  $n$ ,获得的参数精度比前一次要高,估计更准确。

依次重复进行上述运算,形成迭代过程,逐步削减负频率项的影响,可以提高内积变换诊断参数的精度。为验证迭代算法识别阻尼的效果,诊断表1的算例,结果如表2所示。

表2 迭代诊断阻尼比

Tab.2 Damping ratio estimation using iterative algorithm

理论阻尼比	诊断值	相对误差/%
0.004	0.003 99	0.03
0.020	0.019 99	0.03
0.100	0.099 99	0.01

表2说明,通过迭代运算能够精确识别信号阻尼值。即使对大阻尼,诊断精度也相当高。经多次迭代相减,有效地消除了负频率项的干扰作用,阻尼值的诊断精度逐渐稳定,趋于某一固定值。

### 3 密集模式的阻尼识别

#### 3.1 迭代算法消除模式干扰

相近模式之间干涉造成密集模式阻尼识别困难,与响应信号中负频率项对正频率项干涉原理相似。因此,同样采用内积运算和迭代算法相结合的方法进行迭代计算,削减模式之间干涉,分离出估计模式,识别模式阻尼比。

密集模式是由多阶模式相互干涉构成

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-n_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (8)$$

式中  $N$ ——密集模式的阶数

$\omega_i, \theta_i$ ——各阶模式固有频率和相位角

对于  $N$  阶密集模式信号,逐阶进行迭代运算,消除相近模式之间的干涉,具体的诊断步骤如下:

(1)对密集模式信号  $x(t)$  进行 FFT-FT,诊断幅值最大对应模式的固有频率  $\omega \approx \omega_i$ ,利用  $\omega$  构造指数函数  $f(t) = e^{-mt} e^{j\omega t}$ 。

(2)作  $\langle x(t), f(t) / \| f(t) \| \rangle$  运算,根据柯西-施瓦茨不等式定理,当内积模取得最大值时,优化搜索对应的衰减系数  $m \approx n_i$ ;此时,根据式(5)获得模式信号的估计  $\hat{x}_1(t)$ 。

(3)从信号  $x(t)$  中减去  $\hat{x}_1(t)$ ,对信号  $x(t) - \hat{x}_1(t)$  运用步骤(1)和(2)诊断出信号  $\hat{x}_2(t)$ ,重复上述步骤,初步诊断出  $N$  阶的估计模态  $\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_N(t)$ 。

(4)从信号  $x(t)$  中减去诊断出的  $\hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_N(t)$  及  $\hat{x}_1(t)$  的负频率项  $\hat{x}_{1f}(t)$ ,得  $x(t) - \hat{x}_{1f}(t) - \hat{x}_2(t) - \dots - \hat{x}_N(t) = x_1(t) - \hat{x}_{1f}(t) + (x_2(t) - \hat{x}_2(t)) + \dots + (x_N(t) - \hat{x}_N(t))$ ,对其进行诊断。由于减去了  $\hat{x}_{1f}(t)$  和其余  $N-1$  阶的估计模态,削弱了对正频率项  $\hat{x}_{1e}(t)$  的干扰,诊断出的  $\hat{x}_1(t)$  精度更高。

(5)从信号  $x(t)$  再减去  $\hat{x}_{2f}(t), \hat{x}_3(t), \dots, \hat{x}_N(t)$  和前一步骤诊断的  $\hat{x}_1(t)$ ,对其进行诊断,获得精度更高的估计  $\hat{x}_2(t)$ 。重复这种运算,形成迭代过程,逐步地提高各阶模式参数的识别精度,直到识别结果稳定在一定范围内为止。

(6)输出各阶模式的识别结果  $n_i$  和  $\omega_i$ ,得出阻尼比。

#### 3.2 密集模式仿真识别

基于式(8),模拟一个三阶密集模式信号

$$x(t) = 5e^{-\zeta_1 \omega_{n1} t} \cos(\omega_{d1} t + \pi/3) + 10e^{-\zeta_2 \omega_{n2} t} \cdot$$

$$\cos(\omega_{d2} t + \pi/4) + 15e^{-\zeta_3 \omega_{n3} t} \cos(\omega_{d3} t + \pi/7) \quad (9)$$

其中,  $\zeta_1, \zeta_2$  和  $\zeta_3$  分别为 0.02、0.03 和 0.04;模式频率分别为 40、43 和 46 Hz。采样频率 2 000 Hz,采样点数 2 048,信号  $x(t)$  的频谱图形如图 1 所示。

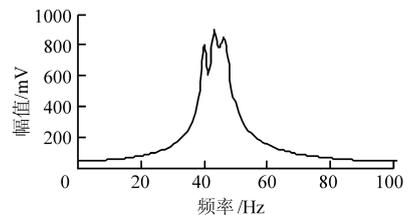


图1 密集模式频谱图

Fig.1 Spectrum of closely spaced modes

利用内积运算和迭代算法相结合方法诊断上述三阶密集信号,结果如表3所示。

表3 三阶密集模式的阻尼识别结果

Tab.3 Damping identification of 3-DOF system

模式阶数	固有频率			阻尼比		
	理论值 /Hz	识别值 /Hz	相对误差 /%	理论值	识别值	相对误差 /%
1	39.99	39.997 99	0.02	0.02	0.019 86	0.72
2	42.98	42.988 28	0.03	0.03	0.030 16	0.53
3	45.96	45.955 03	0.09	0.04	0.039 83	0.43

表3结果表明,迭代相减,能够有效消除相近模式之间的干涉,使得阻尼比识别准确,误差在1%以内。进一步考察噪声对该方法识别效果的影响,对上述密集模式信号加高斯白噪声,诊断结果如表4所示。

表 4 加白噪声的阻尼识别结果

Tab.4 Damping estimation with white-noise

模态阶数	信噪比 /dB	固有频率			阻尼比		
		理论值/Hz	诊断值/Hz	相对误差/%	理论值	诊断值	相对误差/%
1	10	39.990 00	39.931 64	0.15	0.020 00	0.020 28	1.41
2		42.980 00	42.972 81	0.02	0.030 00	0.030 68	2.27
3		45.960 00	46.056 52	0.21	0.040 00	0.040 64	1.62
1	8	39.990 00	40.021 99	0.08	0.020 00	0.019 52	2.43
2		42.980 00	42.928 42	0.12	0.030 00	0.030 68	2.27
3		45.960 00	46.010 56	0.11	0.040 00	0.040 52	1.33

表 4 考察了信噪比为 10 dB 和 8 dB 的阻尼识别情况,识别结果与无噪声结果相比变化不大,说明该方法受噪声干扰小,可运用于实际工程测量。

### 4 试验验证

选取一根 900 mm × 50 mm × 14 mm 钢质悬臂梁。采用力锤激励,通过安装在自由端的加速度传感器采集响应信号,图 2 为测量的时域信号,相应的

频谱图及其频域局部放大图形。

图 2b 频谱图形主要显示 3 个峰值,利用本文方法诊断出响应信号的四阶模态及其阻尼比,诊断结果见表 5。其中第三阶模态在 95 Hz 附近,受到第二阶模态的严重干扰,见图 2c 的频域局部放大图,传统方法很难识别出这一阶模态。采用迭代相减能够有效地消除主要模态,将混叠在主要模态里的次要模态突显出来,进而能够识别出该阶模态。

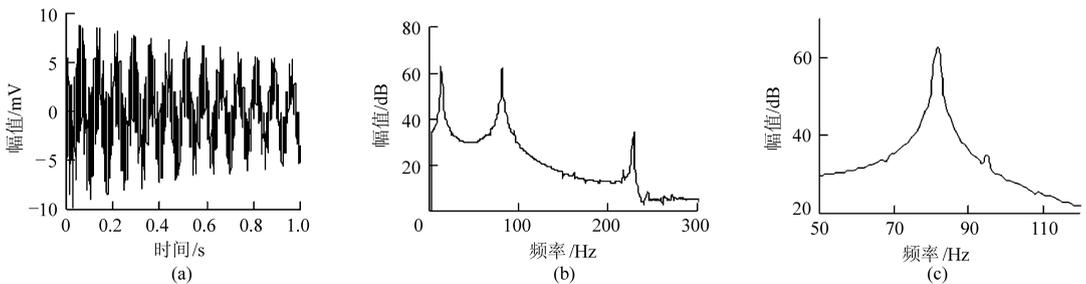


图 2 时域信号和频谱图形

Fig.2 Time domain and frequency spectrum of response signal

(a) 时域信号 (b) 对数频谱图 (c) 频域局部放大

表 5 悬臂梁阻尼比识别结果

Tab.5 Identification results of a cantilever's damping ratio

模态阶数	固有频率/Hz	阻尼比
1	13.36	0.001 31
2	81.58	0.001 93
3	94.93	0.001 89
4	228.79	0.001 52

率项的干扰作用,随着阻尼比的增加负频率项影响增大,导致阻尼的识别精度降低,引用迭代算法解决了大阻尼识别误差大的问题。进而研究密集模态阻尼识别问题,提出了内积运算和迭代算法相结合诊断阻尼的方法。通过理论分析和试验验证,迭代相减能够消除模态之间的干涉,提取各阶模态的“纯模态”,提高阻尼的识别精度,能够有效地识别密集模态阻尼。

### 5 结束语

分析了内积运算识别阻尼的原理,研究了负频

### 参 考 文 献

- 王慧,刘正士. 一种识别结构模态阻尼比的方法[J]. 农业机械学报,2008,39(6): 201~202.  
Wang Hui, Liu Zhengshi. A method of damping ratio identification for structural mode[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(6): 201~202. (in Chinese)
- 应怀樵,刘进明,沈松. 半功率带宽法与 INV 阻尼计法求阻尼比的研究[J]. 噪声与振动控制,2006,26(2): 4~6.  
Ying Huaiqiao, Liu Jinming, Shen Song. Half-power bandwidth method and INV damping ration solver study[J]. Noise and

- Vibration Control, 2006, 26(2): 4~6. (in Chinese)
- 3 陈奎孚,张森文. 半功率法估计阻尼的一种改进[J]. 振动工程学报,2002,15(2): 151~155.  
Chen Kuifu, Zhang Senwen. Improvement on the damping estimation by half power point method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2002, 15(2): 151~155. (in Chinese)
  - 4 赵晓丹,刘涛. 基于内积模极值的小阻尼计算新方法[J]. 机械科学与技术,2009,28(10): 1308~1310.  
Zhao Xiaodan, Liu Tao. A method for small damping estimation by searching the maximum of inner product module[J]. Mechanical Science and Technology, 2009, 28(10): 1308~1310. (in Chinese)
  - 5 黄应来,董大伟,闫兵. 密集模态分离及其参数识别方法研究[J]. 机械强度,2009,31(1): 8~13.  
Huang Yinglai, Dong Dawei, Yan Bing. Study on closely spaced modes decomposition and modal parameter identification[J]. Journal of Mechanical Strength, 2009, 31(1): 8~13. (in Chinese)
  - 6 Yin H P, Duhamel D, Argoul P. Natural frequencies and damping estimation using wavelet transform of a frequency response function[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 271(5): 999~1014.
  - 7 Tan Jiubin, Liu Yan, Wang Lei, et al. Identification of modal parameters of a system with high damping and closely spaced modes by combining continuous wavelet transform with pattern search[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(5): 1055~1060.
  - 8 黄天立,楼梦麟. 小波变换在密集模态结构参数识别中的应用[J]. 振动与冲击,2006,25(5): 140~143.  
Huang Tianli, Lou Menglin. Application of wavelet transform in the modal parameters identification of structures with closely spaced modes[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25(5): 140~143. (in Chinese)
  - 9 刘俊斐,李华军. HHT方法在模态密集结构模态参数识别中的应用研究[J]. 中国海洋大学学报,2007,37(增刊2): 181~188.  
Liu Junfei, Li Huajun. Modal parameter identification for structures with closely spaced modes of vibration using the HHT method[J]. Periodical of Ocean University of China,2007,37(Supp.2): 181~188. (in Chinese)
  - 10 王宏禹. 信号处理相关理论与统一法[M]. 北京:国防工业出版社,2005: 217~221.
  - 11 王慧,刘正士,陈恩伟,等. 悬臂梁结构模态参数 Hibert-Huang 变换识别方法[J]. 农业机械学报,2008,39(9): 187~191.  
Wang Hui, Liu Zhengshi, Chen Enwei, et al. Application of HHT for modal parameters identification to cantilever beam structure[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(9): 187~191. (in Chinese)
  - 12 何正嘉,瞿艳阳,张西宁. 现代信号处理及工程应用[M]. 西安:西安交通大学出版社,2007: 11.

(上接第 189 页)

- 9 Blanes-Vidal V, Hansen M N, Pedersen S, et al. Emissions of ammonia, methane and nitrous oxide from pig houses and slurry: effects of rooting material, animal activity and ventilation flow[J]. Agriculture, Ecosystem & Environment, 2008, 124(3~4): 237~244.
- 10 Haeussermann A, Hartung E, Gallmann E, et al. Influence of season, ventilation strategy, and slurry removal on methane emissions from pig houses[J]. Agriculture, Ecosystem & Environment, 2006, 112(2~3): 115~121.
- 11 Massé D I, Masse L, Claveau S, et al. Methane emissions from manure storages [J]. Transactions of the ASABE, 2008, 51(5): 1775~1781.
- 12 Massé D I, Croteau F, Patni N K, et al. Methane emissions from dairy cow and swine manure slurries stored at 10°C and 15°C [J]. Canadian Biosystems Engineering, 2003, 45: 6.1~6.6.
- 13 Osada T, Rom H B, Dahl P. Continuous measurement of nitrous oxide and methane emission in pig units by infrared photoacoustic detection[J]. Transactions of the ASAE, 1998, 41(4): 1109~1114.
- 14 Ye Z Y, Saha K C, Li B M, et al. Effect of environmental deflector and curtain on air exchange rate in slurry pit in a model pig house[J]. Biosystems Engineering, 2009, 104(4): 522~533.
- 15 Morsing S, Strøm J S, Zhang G, et al. Scale model experiments to determine the effects of internal airflow and floor design on gaseous emissions from animal houses[J]. Biosystems Engineering, 2008, 99(1): 99~104.
- 16 Liang Z S, Westerman P W, Arogo J. Modeling ammonia emission from swine anaerobic lagoons[J]. Transactions of the ASAE, 2002, 45(3): 787~798.