遥感影像的自适应小波精细积分降噪方法*

许文宁[1]　梅树立[1]　王鹏新[1]　杨　勇[2]

（1. 中国农业大学信息与电气工程学院，北京 100083；2. 中国农业机械化科学研究院，北京 100083）

【摘要】 针对遥感影像数据量大、应用精度较高的图像降噪变分法处理时计算效率较低的问题，基于 quasi-Shannon 小波构造了一种二维自适应小波插值算子，并和精细积分法相结合建立了求解二维偏微分方程自适应小波精细积分方法。利用小波变换的多尺度自适应性和精细积分方法的高精度有效提高了图像降噪变分法的求解效率，从而可实现较大遥感影像的降噪处理。

关键词：遥感影像　图像降噪　quasi-Shannon 小波　自适应插值　精细积分法

中图分类号：TN911.73；TP751　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2011)04-0148-05

Adaptive Wavelet Precise Integration Method on Remote Sensing Image Denoising

Xu Wenning[1]　Mei Shuli[1]　Wang Pengxin[1]　Yang Yong[2]

(1. *College of Information and Electrical Engineering*, *China Agricultural University*, *Beijing* 100083, *China*

2. *Chinese Academy of Agricultural Mechanization Sciences*, *Beijing* 100083, *China*)

Abstract

The image denoising variational method possesses higher numerical precision but lower computational efficiency, especially in processing the remote sensing images which is usually larger. To this problem, an adaptive 2-D wavelet interpolation operator was constructed based on quasi-Shannon wavelet function, and then adaptive wavelet precision integration method (PIM) on solving 2-D partial differential equation was proposed by combining with PIM. This proposed method combined the multi-scale property of the wavelet transformation with the higher precision of PIM, which could improve the computational efficiency effectively so that the lager remote sensing image could be processed.

Key words　Remote sensing image, Image denoising, Quasi-Shannon wavelets, Adaptive interpolation, Precise integration

引言

遥感影像在土地和林业资源调查、规划、粮食产量估计等领域具有广泛应用。遥感影像在获取、传输和存储过程中，经常受到各种噪声的干扰，如地表坡度和坡向的变化对地物光谱反射的影响以及大气噪声污染[1]对地物纹理信息的影响，是遥感数据预处理必须考虑的问题。传统的图像降噪方法，如中值滤波、均值滤波等均是通过滤除图像的高频成分来实现，然而遥感影像的边缘和纹理信息等也同样分布在高频区域，应用传统方法降噪的同时边界和纹理信息也被平滑掉，导致对遥感地物类型的识别缺乏重要依据。

图像处理偏微分方程法可利用方程各向异性的特点，实现保边界降噪，但偏微分方程一般采用差分法求解[2~3]，不但求解速度慢，而且易产生人工伪影，影响该方法的广泛使用。小波精细积分法[4]同时结合了小波变换的自适应特性和精细积分技术的

收稿日期：2010－09－25　修回日期：2010－12－07

＊ 国家自然科学基金资助项目(60772038)和中国农业大学基本科研业务费研究生科研创新专项资助项目(kycx09124)

作者简介：许文宁，博士生，主要从事定量遥感及其在农业中的应用研究，E-mail：xuwenning@sohu.com

通讯作者：梅树立，副教授，主要从事计算力学研究，E-mail：meishuli@163.com

高精度特性，可有效克服以上缺点，在 Burgers 方程[4]、热传导方程[5]、浅水长波近似方程组[6]以及其他非线性偏微分方程[7]的求解中得到广泛应用，证实了该方法的有效性和正确性。文献[8 ~10]将该方法成功推广到二维偏微分方程的求解，但没有考虑小波变换的多尺度特性，尽管如此，文献[10]将小波精细积分法应用于图像降噪，有效避免了伪影的产生。自适应小波精细积分法[11]是在通过引入插值小波及插值小波变换理论对 Vasilyev 提出的方法[12~13]进行改造的基础上，构造了多尺度自适应小波插值算子，结合精细积分技术建立了求解一维非线性偏微分方程的一种新方法。文献[14]基于 Shannon 小波构造了求解二维偏微分方程的小波精细积分法，由于 Shannon 小波不具备紧支撑性，在处理较大图像时，计算量巨大。事实上，在众多的插值小波中，quasi-Shannon 小波是唯一同时具备光滑性、近似紧支撑性、正交性和解析表达式的小波[15]。因此基于 quasi-Shannon 小波函数构造小波精细积分法，在处理遥感影像等数据量较大图像时，可以对图像进行分块处理，块与块之间的边界效应可通过构造区间小波去除。在遥感影像子块内部实现有效离散点的自适应配置，在保证计算精度的同时限制偏微分方程离散生成的微分方程组的规模，有效提高计算效率。

1　基于热传导方程的图像降噪原理

令 $g(\boldsymbol{X})$ 是一个正的、有紧支集且 3 次连续可微的实函数，即 $g(\boldsymbol{X})\in C_0^3(\mathbf{R}^N)$。同时还满足以下正规化条件[16]

$$\begin{cases}\int_{\mathbf{R}^N} g(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}=1\\ \int_{\mathbf{R}^N} X_i g(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\int_{\mathbf{R}^N} X_iX_j g(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,N)\\ \int_{\mathbf{R}^N} X_i^2 g(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\int_{\mathbf{R}^N} X_j^2 g(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}=2 \quad (i,j=1,2,\cdots,N)\end{cases} \tag{1}$$

则对于 $\forall t>0$ 和任意实数列 h 以及整数 n，当 $t=nh^2$ 且 $n\to\infty$ 时，有 $(g_h(\boldsymbol{X}))^{n*}\to\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|X|2}{4t}}$，这个收敛性在 $L^2(\mathbf{R}^N)$ 空间逐点适用。其中 $(g(\boldsymbol{X}))^{n*}$ 为 $g(\boldsymbol{X})$ 的 n 次卷积。所以对于每个原始有界图像 $u_0(\boldsymbol{X})$，定义 $L_h u_0=g_h u_0$，由此进一步得 $(L_h)^n u_0\to T_t u_0$，这里 $(T_t u_0)(\boldsymbol{X})=u(t,\boldsymbol{X})$，且 $u(t,\boldsymbol{X})$ 是无量纲化后得到的热传导方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u\\ u(0,\boldsymbol{X})=u_0(\boldsymbol{X})\end{cases} \tag{2}$$

的解。

如果将原始遥感图像作为热传导方程式(2)的初值，则热传导方程初值问题在 t 时刻的解就是对该图像降噪的结果。

2　quasi-Shannon 多层插值小波算法

2.1　quasi-Shannon 小波定义

一般来说，具有插值特性的紧支撑或指数衰减函数均可作为插值小波基函数[12]，如插值样条小波、Daubechies 小波的自相关函数等。但插值样条小波不具备正交性，Daubechies 小波没有解析表达式，在此选用同时具备这些特点的 quasi-Shannon 小波插值函数。

quasi-Shannon 尺度函数定义[13]为

$$\phi_{\Delta,\sigma}(x)=\frac{\sin(\pi x/\Delta)}{\pi x/\Delta}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

其中　$\sigma=r\Delta$

式中　Δ——离散点间距　　r——任意参数

　　σ——窗口大小参数

2.2　多层插值基函数的构造

根据张量积的定义，可得出二维小波函数 ψ^1_{j,k_1,k_2}、ψ^2_{j,k_1,k_2}、ψ^3_{j,k_1,k_2} 和二维尺度函数 ϕ_{j,k_1,k_2}。

$$\begin{cases}\phi_{j,k_1,k_2}(x,y)=\phi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y)\\ \psi^1_{j,k_1,k_2}(x,y)=\phi_{j+1,2k_1+1,2k_2}(x,y)\\ \psi^2_{j,k_1,k_2}(x,y)=\phi_{j+1,2k_1,2k_2+1}(x,y)\\ \psi^3_{j,k_1,k_2}(x,y)=\phi_{j+1,2k_1+1,2k_2+1}(x,y)\end{cases} \tag{4}$$

令 j 为层的编号，J 为 j 的最大值，显见，第 j 层的小波函数等于第 $j+1$ 层的尺度函数。k_1,k_2 表示小波配点中离散配点的编号。多层小波配置法需要同时考虑不同离散栅格大小下的插值算子，根据插值小波变换理论，函数 $f(x,y)$ 的逼近表达式为

$$f(x,y)=\sum_{k_1=0}^{2j0}\sum_{k_2=0}^{2j0}\beta_{j_0,k_1,k_2}\phi_{j_0,k_1,k_2}+\sum_{j\geqslant j_0}\sum_{k_1=0}^{2^j}\sum_{k_2=0}^{2^j}(\alpha^1_{j,k_1,k_2}\psi^1_{j,k_1,k_2}+\alpha^2_{j,k_1,k_2}\psi^2_{j,k_1,k_2}+\alpha^3_{j,k_1,k_2}\psi^3_{j,k_1,k_2}) \tag{5}$$

其中　$\beta_{j_0,k_1,k_2}=f(x^{j_0}_{k_{01}},y^{j_0}_{k_{02}})\quad (j=j_0,j_0+1,\cdots,J-1)$

式中　k_{01}、k_{02}——$j=0$ 时配点编号

　　α^1_{j,k_1,k_2}、α^2_{j,k_1,k_2}、α^3_{j,k_1,k_2}——插值小波系数

插值算子 $I_{k_1,k_2}(x,y)$ 定义为

$$f_J(x,y)=\sum_{k_1=0}^{2^J}\sum_{k_2=0}^{2^J}I_{k_1,k_2}(x,y)f(x^J_{k_1},y^J_{k_2}) \tag{6}$$

为了得到统一的多层插值小波算子，需要将插值小波系数 α^1_{j,k_1,k_2}、α^2_{j,k_1,k_2}、α^3_{j,k_1,k_2} 表达成 J 层上所有配置点的权重和，因此定义限制算子为

$$R^{l,l,j,j}_{k_1,k_2,m_1,m_2}=\begin{cases}1 & (x^l_{k_1}=x^j_{m_1}\text{且 }y^l_{k_2}=y^j_{m_2},\\ & \text{其中 }k_1、k_2、m_1、m_2\in\mathbf{Z})\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}\tag{7}$$

限制算子表示了多层间对应值相等的配点。利用限制算子可得小波系数表达式

$$\begin{aligned}\alpha^1_{j,k_1,k_2}=&\sum_{i_1=0}^{2^J}\sum_{i_2=0}^{2^J}R^{j+1,j+1,J,J}_{2k_1+1,2k_2,i_1,i_2}f(x^J_{i_1},y^J_{i_2})-\\ &\Big[\sum_{i_1=0}^{2^J}\sum_{i_2=0}^{2^J}\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}f(x^J_{i_1},y^J_{i_2})\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}(x^{j+1}_{2k_1+1},y^{j+1}_{2k_2})+\\ &\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_{11}=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{k_{12}=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{i_1=0}^{2^J}\sum_{i_2=0}^{2^J}(C1^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}\phi^{j_1+1}_{2k_{11}+1,2k_{12}}f(x^J_{i_1},y^J_{i_2})+\\ &C2^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}\phi^{j_1+1}_{2k_{11},2k_{12}+1}f(x^J_{i_1},y^J_{i_2})+\\ &C3^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}\phi^{j_1+1}_{2k_{11}+1,2k_{12}+1}f(x^J_{i_1},y^J_{i_2}))\Big]=\\ &\sum_{i_1=0}^{2^J}\sum_{i_2=0}^{2^J}C1^{j,j,J,J}_{k_1,k_2,i_1,i_2}f(x^J_{i_1},y^J_{i_2})\end{aligned}\tag{8}$$

式中　$f(x^J_{k_1},y^J_{k_2})$——第 J 层的离散点

$C1^{j,j,J,J}_{k_1,k_2,i_1,i_2}$、$C1^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}$——常量矩阵

$C2^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}$、$C3^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}$——常量矩阵

k_{11}、k_{12}——$j=1$ 时配点编号

i_1、i_2——图像中某像素点 x、y 的平移量

所以，当 $j>j_0$ 时

$$\begin{aligned}C1^{j,j,J,J}_{k_1,k_2,i_1,i_2}=&R^{j+1,j+1,J,J}_{2k_1+1,2k_2,i_1,i_2}-\\ &\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}(x^{j+1}_{2k_1+1},y^{j+1}_{2k_2})-\\ &\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_{11}=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{k_{12}=0}^{2^{j_1}-1}\big[C1^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}\phi^{j_1+1}_{2k_{11}+1,2k_{12}}(x^{j+1}_{2k_1+1},y^{j+1}_{2k_2})+\\ &C2^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}\phi^{j_1+1}_{2k_{11},2k_{12}+1}+C3^{j_1,j_1,J,J}_{k_{11},k_{12},i_1,i_2}\phi^{j_1+1}_{2k_{11}+1,2k_{12}+1}\big]\\ &(k_1,k_2\in Z^j;\ i_1,i_2\in Z^j;\ j=j_0+1,j_0+2,\cdots,J-1;\\ &k_1,k_2=0,1,\cdots,2^j-1)\end{aligned}\tag{9}$$

当 $j=j_0$ 时

$$\begin{cases}C1^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}=R^{j_0+1,j_0+1,J,J}_{2k_1+1,2k_2,i_1,i_2}-\\ \quad\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}(x^{j_0+1}_{2k_{01}+1},y^{j_0+1}_{2k_{02}})\\ C2^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}=R^{j_0+1,j_0+1,J,J}_{2k_1,2k_2+1,i_1,i_2}-\\ \quad\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}(x^{j_0+1}_{2k_{01}},y^{j_0+1}_{2k_{02}+1})\\ C3^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}=R^{j_0+1,j_0+1,J,J}_{2k_{01}+1,2k_{02}+1,i_1,i_2}-\\ \quad\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}(x^{j_0+1}_{2k_{01}+1},y^{j_0+1}_{2k_{02}+1})\end{cases}\tag{10}$$

由式(9)、(10)可递归分别求出 α^2_{j,k_1,k_2}、α^3_{j,k_1,k_2}。

利用限制算子的定义可以将 $f(x^{j_0}_{k_{01}},y^{j_0}_{k_{02}})$ 改写为

$$f(x^{j_0}_{k_{01}},y^{j_0}_{k_{02}})=\sum_{k_1=0}^{2^J}\sum_{k_2=0}^{2^J}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},k_1,k_2}f(x^J_{k_1},y^J_{k_2})\tag{11}$$

将式(11)代入式(5)可得

$$\begin{aligned}f_J(x,y)=&\sum_{k_1=0}^{2^J}\sum_{k_2=0}^{2^J}\Big[\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},i_1,i_2}\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}+\\ &\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k_1=0}^{2^j}\sum_{k_2=0}^{2^j}(C1\psi^1_{j,k_1,k_2}+C2\psi^2_{j,k_1,k_2}+C3\psi^3_{j,k_1,k_2})\Big]f(x^J_{k_1},y^J_{k_2})\end{aligned}\tag{12}$$

对比插值算子定义(式(6))，可得插值算子

$$\begin{aligned}I_{k_1,k_2}(x,y)=&\sum_{k_{01}=0}^{2^{j_0}}\sum_{k_{02}=0}^{2^{j_0}}R^{j_0,j_0,J,J}_{k_{01},k_{02},k_1,k_2}\phi^{j_0}_{k_{01},k_{02}}(x,y)+\\ &\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k_1=0}^{2^j}\sum_{k_2=0}^{2^j}(C1\psi^1_{j,k_1,k_2}(x,y)+C2\psi^2_{j,k_1,k_2}(x,y)+\\ &C3\psi^3_{j,k_1,k_2}(x,y))\end{aligned}\tag{13}$$

将自适应插值微分算子式(13)代入图像处理热传导方程式(2)，并将原始图像作为偏微分方程的初始值，便可通过迭代实现图像的自适应降噪。

3　数值实验结果和讨论

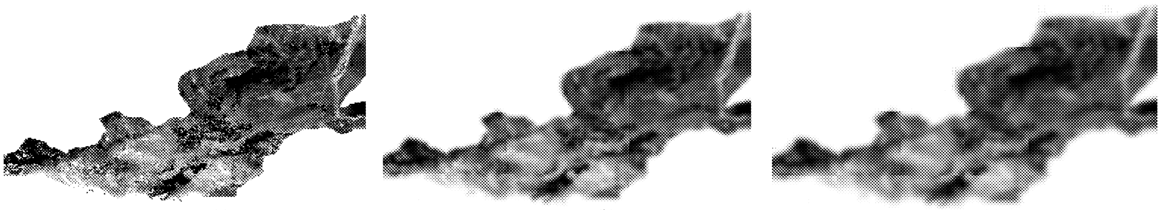
NOAA-AVHRR 数据以覆盖面积广、时间分辨率高的优势应用于较大尺度区域内地表信息的采集，能够实时、宏观的监测地表信息变化[17~18]。数据在接收和传输过程中受到各种噪声的影响，影像降噪的目的是最大限度保留图像的边缘和纹理信息。

实验选取陕西关中平原 2007 年 2 月 5 日 NOAA-AVHRR 遥感影像为研究对象，覆盖区域包括水体、植被、建筑和裸地等地物类型，以遥感影像(300 像素 ×300 像素)作为自适应插值小波 quasi-Shannon 热传导方程的初始值，采用基于小波精细积分技术的遥感图像自适应降噪方法对其进行平滑处理，得到不同运行时刻的降噪结果和自适应配点图，如图 1、2 所示。

从图 1、2 可以看出，自适应小波积分降噪方法是一种保边界降噪方法，局部小目标被部分平滑，大目标边界仍较清晰，降噪结果较为明显。实验设定初始步长为 0.000 2，运行时刻 $t=0.000\,2$ 时，图 2a 统计 NOAA-AVHRR 影像自适应配点数为 49 838，当 t 增加到 0.000 4 时，图 2b 统计自适应配点数为 43 038，随着 t 不断增加，自适应配点数明显减少，图像平滑效果也逐渐增强，配点的自适应性越来越好。因此，运用自适应插值小波求解热传导方程对遥感图像进行降噪，能够较好的体现图像降噪过程的自适应性。

图中还可以看出，降噪平滑过程中图像边缘逐渐模糊，在边缘等梯度较大的地方配点自适应增加，在梯度较小的地方配点自适应减少。这种自适应插

值小波求解算法不需要对图像中所有像素点进行处理，只需要处理配置点，因为随着时间变化配置点越来越少，大大节省了计算内存，提高了计算效率。此外，图像边缘出现了模糊，这是由于热传导方程式各向同性的方程在不同的方向扩散度一致，造成了图像平滑的同时模糊了边缘。

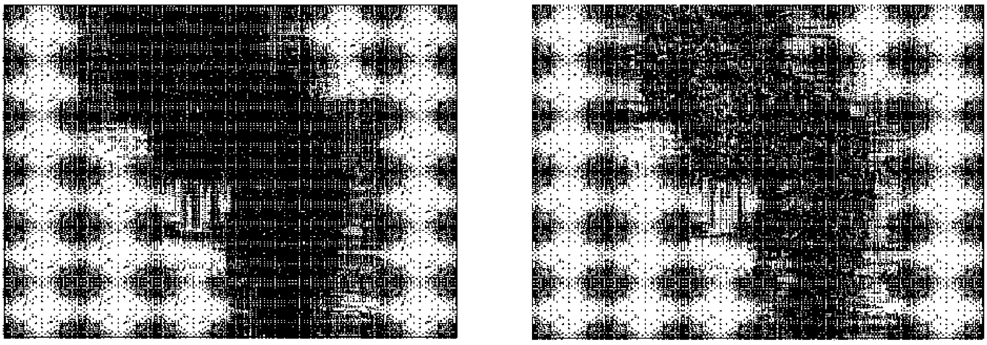


(a)　(b)　(c)

图 1　适应插值小波降噪结果

Fig. 1　Denoised images based onadaptive interpolation

（a）原始影像　（b）$t = 0.000\,2$　（c）$t = 0.000\,4$



(a)　(b)

图 2　降噪结果的自适应配点图

Fig. 2　Adaptive collocation map of denoised images

（a）$t = 0.000\,2$　（b）$t = 0.000\,4$

4　结束语

应用自适应插值小波精细积分技术对遥感图像降噪，在保证计算精度的情况下可有效提高图像处理速度，避免差分方法带来的伪影。但多尺度小波变换将整个求解区域的有效点看作相关点，必然导致偏微分方程离散生成的常微分方程组规模巨大，对图像进行分块处理是解决该问题的有效手段。本文通过图像延拓方法解决块与块之间的边界效应，该方法对小波函数的紧支撑性也有较高的要求。若要完全解决边界效应需要从边界光滑延拓的角度建立一种新的区间小波来实现，这是目前正在进行的工作。

参　考　文　献

1　石文轩，吴敏渊，邓德祥．遥感图像去云雾噪声的实现[J]．光学精密工程，2010，18(1)：266 ~ 272.
Shi Wenxuan, Wu Minyuan, Deng Dexiang. Implementation of eliminating cloud and mist noise from remote sensing images [J]. Optics and Precision Engineering, 2010, 18(1): 266 ~ 272. (in Chinese)

2　谢美华，王正明．图像分辨率增强的偏微分方程方法[J]．遥感学报，2005，9(6)：673 ~ 679.
Xie Meihua, Wang Zhengming. The partial differential equation method for image resolusion enhancement[J]. Journal of Remote Sensing, 2005, 9(6): 673 ~ 679. (in Chinese)

3　万聪梅，谢晗昕，张勇．基于 PDE 方法的遥感图像处理[J]．计算机测量与控制，2006，14(9)：1 254 ~ 1 256.
Wan Congmei, Xie Hanxin, Zhang Yong. Remote sensing image preprocessing based on PDE method[J]. Computer Measurement & Control, 2006, 14(9): 1 254 ~ 1 256. (in Chinese)

4　梅树立，张森文，雷廷武．Burgers 方程的小波精细积分算法[J]．计算力学学报，2003，20(1)：49 ~ 52.
Mei Shuli, Zhang Senwen, Lei Tingwu. On wavelet precise time-integration method for Burgers equation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(1): 49 ~ 52. (in Chinese)

5　王丫．热传导方程的小波精细积分算法[J]．重庆工学院学报：自然科学版，2007，21(8)：130 ~ 132.
Wang Ya. Wavelet precise time-integration method for heat conduction equation[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science Edition, 2007, 21(8): 130 ~ 132. (in Chinese)

6　Xia Li. Numerical solution based on quasi-Shannon wavelet for approximate equations of long waves in shallow water[J].

Journal of Mathematics, 2007, 27(3): 255 ~ 260.

7 张晓艳, 赵凤群, 戴芳, 等. 基于能量的非线性偏微分方程的小波配置法[J]. 西安理工大学学报, 2008, 24(3): 358 ~ 361.

Zhang Xiaoyan, Zhao Fengqun, Dai Fang, et al. A wavelet collocation method of nonlinear partial differential equation based on energy[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2008, 24(3): 358 ~ 361. (in Chinese)

8 张晓艳, 赵凤群, 戴芳,等. 二维变系数偏微分方程的小波数值方法[J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, 20(3): 289 ~ 293.

Zhang Xiaoyan, Zhao Fengqun, Dai Fang, et al. Wavelet numerieal method for two dimensional varisble coeffleient partial differential equations[J]. Basic Science Journal of Textile University, 2007, 20(3): 289 ~ 293. (in Chinese)

9 曹小琴, 林京. 二维扩散方程的区间拟小波数值解[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2010, 33(6): 951 ~ 954.

Cao Xiaoqin, Lin Jing. Study of two-dimensional diffusion equation by interval quasi-wavelet method[J]. Journal of Hefei University of Technology: Natural Science Edition, 2010, 33(6): 951 ~ 954. (in Chinese)

10 张兰霞, 杨勇, 梅树立. 图像降噪的小波精细积分方法[J]. 农业机械学报, 2006, 37(7): 109 ~ 112.

Zhang Lanxia, Yang Yong, Mei Shuli. Wavelet precise integration method on image denosing[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(7): 109 ~ 112. (in Chinese)

11 梅树立, 陆启韶, 张森文. 求解非线性偏微分方程的自适应小波精细积分法[J]. 计算物理, 2004, 21(6): 523 ~ 530.

Mei Shuli, Lu Qishao, Zhang Senwen. An adaptive wavelet precise integration method for partial differential equations[J]. Chinese Journal of Computational Physics,2004, 21(6): 523 ~ 530. (in Chinese)

12 Vasilyev O V, Stefano G D, Goldstein D E, et al. Lagrangian dynamic SGS model for SCALES of isotropic turbulence[J]. Journal of Turbulence, 2008, 9(11): 1 ~ 14.

13 Vasilyev O V, Kevlahan N K R. An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic problems[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 206(2): 412 ~ 431.

14 姜彩明, 王刚, 江景涛. 图像去噪的自适应插值小波算法[J]. 青岛农业大学学报: 自然科学版, 2010, 27(2): 164 ~ 167.

Jiang Caiming, Wang Gang, Jiang Jingtao. Wavelet adaptive interpolation method on image denosing[J]. Journal of Qingdao Agricultural University: Natural Science, 2010, 27(2): 164 ~ 167. (in Chinese)

15 Gei G W. Quasi wavelet and quasi interpolating wavelets[J]. Chemical Physics Letters, 1998, 296(3 ~ 4): 215 ~ 222.

16 张亶, 陈刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

17 王鹏新, 龚健雅, 李小文. 条件植被温度指数及其在干旱监测中的应用[J]. 武汉大学学报: 信息科学版,2001, 26(5): 412 ~ 418.

Wang Pengxin, Gong Jianya, Li Xiaowen. Vegetation-temperature condition index and its application for drought monitoring [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2001, 26(5): 412 ~ 418. (in Chinese)

18 孙威, 王鹏新, 韩丽娟,等. 条件植被温度指数干旱检测方法的完善[J]. 农业工程学报, 2006, 22(2): 22 ~ 26.

Sun Wei, Wang Pengxin, Han Lijuan, et al. Further improvement of the approach to monitoring drought using vegetation and temperature condition indexes from multi-years' remotely sensed data[J]. Transactions of the CSAE, 2006, 22(2): 22 ~ 26. (in Chinese)