

# 基于 JPDF 方法的喷雾湍流燃烧数值模拟<sup>\*</sup>

何志霞<sup>1</sup> 王谦<sup>1</sup> Andriy Rybakov<sup>2</sup> Ulrich Maas<sup>2</sup>

(1. 江苏大学能源与动力工程学院, 镇江 212013; 2. 卡尔斯鲁厄大学热力技术研究所, 卡尔斯鲁厄 76128, 德国)

**【摘要】** 将速度-标量-频率联合概率密度函数 JPDF 输运方程方法应用于两相喷雾湍流反应流问题, 利用火焰面模型解耦流动和化学反应动力学的耦合关系, 建立相应的数值计算模型。采用 Monte - Carlo 数值计算方法, 针对文献中以甲醇为燃料所进行的湍流喷雾燃烧值斑火焰这一试验进行了数值模拟, 通过与 Fluent 下的计算结果及试验结果的对比分析, 验证了所建模型的准确性。

**关键词:** 喷雾 湍流燃烧 联合概率密度函数 小火焰面模型 数值模拟

**中图分类号:** O643.2<sup>+</sup>1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)07-0006-05

## Joint Probability Density Function Modeling of Spray and Turbulent Reactive Flow

He Zhixia<sup>1</sup> Wang Qian<sup>1</sup> Andriy Rybakov<sup>2</sup> Ulrich Maas<sup>2</sup>

(1. School of Energy Resources and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

2. Institute of Technical Thermodynamics, University of Karlsruhe, Karlsruhe 76128, Germany)

### Abstract

In the spray turbulent combustion, droplets, turbulent and chemical reaction are strongly coupled and the physical and chemical mechanisms are very complex. Velocity-scalar-frequency joint probability density function (JPDF) transport equation method was introduced into the two-phase turbulent reactive flow coupled with flamelet method for solving the relation between flow field and chemical dynamics. Based on this model and the Monte - Carlo numerical solving method, the numerical simulation was performed for the turbulent spray combustion in a piloted jet flame burner developed by Masri. The comparison between the experiment and the numerical simulation results verified the spray JPDF model.

**Key words** Spray, Turbulent combustion, Joint probability density function, Flamelet model, Numerical simulation

### 引言

湍流燃烧本身由于其湍流流动与化学反应过程耦合机理的复杂性, 湍流输运、有限速率化学反应的非线性特点, 使其燃烧的物理化学过程显得尤为复杂。近些年发展起来的概率密度函数 PDF (probability density function) 输运方程方法<sup>[1]</sup> 成为对其进行数值模拟最理想、最合适, 也是最有潜力的一种方法。该方法基于湍流场随机性和概率统计描

述, 将流场速度、温度和组分浓度等特征量作为随机变量, 研究其概率密度函数在相空间的传递行为。出现在 PDF 输运方程中的化学反应源项以封闭形式出现, 且不存在任何假设前提, 因此能够精确模拟任意详细的化学动力学过程。当前该方法在气相湍流燃烧问题中已取得很大成功<sup>[2-3]</sup>。而自 20 世纪 90 年代开始该 PDF 方法被引入多相流领域以来, 也不断有学者开始将该方法用于两相喷雾湍流燃烧问题的研究, 但仍处于探索阶段<sup>[4-6]</sup>。本文针对这种

两相喷雾湍流燃烧问题, 将速度-标量-频率联合概率密度函数 JPDP (joint probability density function) 输运方程方法应用于两相喷雾湍流燃烧问题, 开发 JPDP 程序代码中的喷雾模块, 其中采用易于考虑详细化学反应机理的小火焰面模型来解耦流动和化学反应动力学耦合关系。

## 1 喷雾湍流燃烧 JPDP 数学模型

### 1.1 两相流的联合概率密度函数 JPDP 描述

两相流的联合 JPDP 函数<sup>[1,4]</sup>为:  $f_{v,\psi,\beta}(\hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\beta}; \mathbf{x}, t)$ 。其中,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N+1})^T$ ,  $\mathbf{v}$  为速度矢量,  $\psi$  为标变量矢量,  $\beta$  为相区分参数,  $\theta_k$  为相指示函数, 下标  $k$  表示第  $k$  相, 上标  $\hat{\cdot}$  表示对应的样本空间变量。

于是有

$$\left[ \begin{array}{l} \langle \mathbf{v}_k \rangle (\mathbf{x}, t) \\ \langle \psi_k \rangle (\mathbf{x}, t) \\ \langle \theta_k \rangle (\mathbf{x}, t) \end{array} \right] = \frac{1}{\langle \theta_k \rangle (\mathbf{x}, t)} \cdot \iint \theta_k(\hat{\beta}) \left[ \begin{array}{l} \hat{v} \\ \hat{\psi} \\ 1 \end{array} \right] f_{v,\psi,\beta}(\hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\beta}; \mathbf{x}, t) d\hat{v} d\hat{\psi} d\hat{\beta} \quad (1)$$

式中  $\langle \cdot \rangle$  为数学期望, 也即平均值, 对应的两相流联合 JPDP 输运方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho(\hat{\psi}, \hat{\beta})f}{\partial t} + \hat{v}_i \frac{\partial \rho(\hat{\psi}, \hat{\beta})f}{\partial x_i} = \\ & - \frac{\partial}{\partial \hat{v}_i} (\langle A_i | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\beta} \rangle \rho(\hat{\psi}, \hat{\beta})f) - \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{\Psi}_\alpha} (\langle \Theta_\alpha | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\beta} \rangle \rho(\hat{\psi}, \hat{\beta})f) - \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} (\langle B | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\beta} \rangle \rho(\hat{\psi}, \hat{\beta})f) \end{aligned} \quad (2)$$

式中的  $A_i, \Theta_\alpha, B$  表达式见文献[1]。

气相的 JPDP 函数为:  $f_g(\hat{v}, \hat{\psi}; \mathbf{x}, t)$ , 则其 JPDP 输运方程

$$\begin{aligned} & \rho_g(\hat{\psi}) \frac{\partial f_g}{\partial t} + \rho_g(\hat{\psi}) \hat{v}_i \frac{\partial f_g}{\partial x_i} + \left( \rho_g(\hat{\psi}) g_i - \right. \\ & \left. \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f_g}{\partial \hat{v}_i} + \frac{\partial}{\partial \hat{\Psi}_\alpha} [\rho_g(\hat{\psi}) S_\alpha(\hat{\psi}) f_g] = \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{v}_i} \left[ \left\langle \left( -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) | \hat{v}, \hat{\psi} \right\rangle f_g \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{\Psi}_\alpha} \left[ \left\langle \frac{\partial J_j^\alpha}{\partial x_j} | \hat{v}, \hat{\psi} \right\rangle f_g \right] \quad (p' \equiv p - \langle p \rangle) \end{aligned} \quad (3)$$

由该 JPDP 方程可看出, 其等号左边的对流项及化学反应速率项是封闭的, 可精确求解, 而等号右

边的粘性应力张量、脉动压力梯度及分子扩散项仍需模拟。本计算中, 对不封闭的粘性应力、脉动压力梯度的条件平均项, 采用通用的 Langevin 模型进行模拟, 而对标量的分子扩散项采用随机混合模型进行模拟。

喷雾相的 JPDP 函数:  $f_s(\hat{v}, \hat{\psi}, \hat{R}, \hat{T}; \mathbf{x}, t)$ , 则相应喷雾相的 JPDP 输运方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_s}{\partial t} + \hat{v}_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial \hat{v}_i} (\langle A_i | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{R}, \hat{T} \rangle f_s) - \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{\Psi}_\alpha} (\langle \Theta_\alpha | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{R}, \hat{T} \rangle f_s) - \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{R}} (\langle B | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{R}, \hat{T} \rangle f_s) - \\ & \frac{\partial}{\partial \hat{T}} (\langle Z | \hat{v}, \hat{\psi}, \hat{R}, \hat{T} \rangle f_s) \end{aligned} \quad (4)$$

### 1.2 Monte - Carlo 颗粒法数学描述

JPDP 输运方程由于维数相当高, 难以用有限容积、有限差分或有限元等方法来数值求解, 目前比较可行的一种数值方法是 Monte - Carlo 法。该方法的独特优势是其计算量随维数仅呈线性增长, 于是非常适合类似 PDF 方程这样的高维问题。

Monte - Carlo 法实质是把 JPDP 输运方程从 Euler 形式转变为 Lagrange 形式, 用离散的流体质点或“颗粒”代替连续空间场。求解过程就是跟踪这些随机颗粒运动轨迹和各有关参数随时间的变化过程。各参数系综平均概率定义为参数值在给定范围内的颗粒数与颗粒总数之比。于是, 气相的离散 JPDP 用颗粒表示为

$$f_{N_g}(\hat{v}, \hat{\psi}, \hat{\omega}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{N_g(t)} \cdot \sum_{k=1}^{N_g(t)} \left[ \begin{array}{l} \delta(\hat{v} - \mathbf{v}^{(k)}(t)) \delta(\hat{\psi}_g - \psi_g^{(k)}(t)) \\ \delta(\hat{\omega} - \omega^{(k)}(t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}(t)) \end{array} \right] \quad (5)$$

喷雾相的离散 JPDP 函数用颗粒表示为

$$f_{N_s}(\hat{v}, \hat{\psi}, \hat{R}, \hat{T}, \mathbf{x}; t) = \frac{1}{N_s(t)} \cdot \sum_{k=1}^{N_s(t)} \left[ \begin{array}{l} \delta(\hat{v} - \mathbf{v}^{(k)}(t)) \delta(\hat{\psi}_s - \psi_s^{(k)}(t)) \\ \delta(\hat{R} - R^{(k)}(t)) \delta(\hat{T} - T^{(k)}(t)) \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}(t)) \end{array} \right] \quad (6)$$

相应的可建立气相各颗粒的速度、湍流频率和组分及喷雾相各颗粒的速度、温度、组分和颗粒半径的 Lagrange 型随机微分方程 SDE (stochastic differential equation), 即各颗粒参数的变化可以用 Lagrange 型随机微分方程 SDE 表示。

(1) 气相的 SDE 方程

$$dx_i^{(k)} = v_i^{(k)} dt \quad (7)$$

速度子模型采用 SLM (simplified Langevin model) 模型,即

$$dv_i^{(k)} = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} dt - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) \cdot \frac{\varepsilon}{k} (v_j^{(k)} - \langle v_j \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon} dW_i + I_v^{(k)} \quad (8)$$

湍流频率为

$$d\omega^{(k)} = -C_3 \langle \omega \rangle (\omega^{(k)} - \langle \omega \rangle) dt - S_\omega \langle \omega \rangle \omega^{(k)} dt + \sqrt{2C_3 C_4 \langle \omega \rangle^2 \omega^{(k)}} dW + I_\omega^{(k)} \quad (9)$$

其中  $S_\omega = C_{\omega 2} - C_{\omega 1} \frac{P}{\varepsilon}$   $P = -\langle v_i v_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j}$

$W$ 、 $W_i$  为等熵 Wiener 统计过程。

组分为

$$d\psi_\alpha^{(k)} = S_\alpha (\psi_\alpha^{(k)}) dt + M_\alpha (\psi_\alpha^{(k)}) dt + I_{\psi_\alpha}^{(k)} (\langle \psi_g \rangle, \langle \psi_s \rangle, \langle v_g \rangle, \langle v_s \rangle) \quad (10)$$

其中,上述方程中模型常数: $C_0 = 2.1$ ,  $C_3 = 1.0$ ,  $C_4 = 0.25$ ,  $C_{\omega 1} = 0.56$ ,  $C_{\omega 2} = 0.9$ 。

由上述的 SDE 方程可看出,本模型只考虑了喷雾液滴相组分对气相的作用,而忽略了喷雾相动量及传热过程对气相的作用。

(2) 喷雾相的 SDE 方程

喷雾相的 SDE 方程是在以下喷雾假定的基础上建立的,即:喷雾粒子假定为球状;喷雾粒子内部无对流;喷雾为稀薄喷雾;喷雾粒子之间无相互作用;整个喷雾粒子假定为等温;忽略热辐射。

于是喷雾相各颗粒的 SDE 方程同样有颗粒速度、颗粒半径、颗粒温度的随机微分方程,分别为

$$dx^{(k)} = v^{(k)} dt \quad (11)$$

$$dv^{(k)} = \frac{3}{8} C_D \frac{\langle \rho_g \rangle |v_g - v^{(k)}|}{\rho_s R^{(k)}} (v_g - v^{(k)}) dt \quad (12)$$

$$v_g = \langle v_g \rangle + \sqrt{C_0 \langle \varepsilon \rangle} \Delta w \Delta t$$

式中  $C_D$ ——阻力系数

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_r} (1 + 0.15 Re_r^{0.687}) & (Re_r \leq 1000) \\ 0.44 & (Re_r > 1000) \end{cases}$$

其中

$$Re_r = \frac{2\rho_g |v_g - v_s| R}{\mu_g}$$

$$dR^{(k)} = -\frac{1}{2\rho_s R^{(k)}} \cdot$$

$$Sh D_v (\langle w_g \rangle - w_{surface} (T^{(k)}, \langle p \rangle)) dt \quad (13)$$

其中

$$Sh = 2 + 0.6 Re_r^{0.5} Sc^{0.33}$$

式中  $Sh$ ——质输运系数  $Sc$ ——施密特数

$w_g$ ——液滴蒸汽在空气中的质量分数

$w_{surface}$ ——液滴蒸汽在液滴表面的质量分数

$$dT^{(k)} = \frac{3\lambda_s}{2\rho_s c_p (R^{(k)})^2} Nu (\langle T_g \rangle - T^{(k)}) dt +$$

$$\frac{3h_v^{(k)}}{c_p R^{(k)}} dR^{(k)} \quad (14)$$

其中  $Nu = 2 + 0.552 Re_r^{0.5} Pr^{1/3}$

式中  $Nu$ ——热输运系数  $Pr$ ——普朗特数

$\lambda_s$ ——燃油热导率

$h_v$ ——燃油的汽化潜热

在上述 Monte - Carlo 随机微分方程计算过程中,在计算出每个随机颗粒随时间变化对应参数后,再对这些随机颗粒采用最小平方的三次样条函数方法作统计平均,得到所需平均值和二阶统计矩值。

(3) 平均压力场的求取

在完全用上述 MC 颗粒法求解联合速度-标量-频率的 PDF 方程时,在 SDE 方程中出现的平均压力场是通过求解压力 Poisson 方程得出的。

(4) 小火焰面模型

本数值模拟中流动和化学反应动力学耦合关系采用小火焰面模型来解耦,根据燃料在空气中燃烧时详细的化学反应机理事先求得小火焰面数据库,即可根据气相 SDE 方程求得湍流频率  $\omega$  和组分  $\psi_\alpha$ ,进而由求得的混合分数  $\xi$  直接查该数据库获得温度  $T$  及各组分的质量分数。

## 2 数值模拟

利用悉尼大学 Masri 等以甲醇为燃料进行的湍流喷雾燃烧值班火焰这一试验的试验数据<sup>[7]</sup>对本文所建的喷雾 JPDF 模型进行了验证和修正,并在此基础上进行了相应的分析。

值班射流火焰燃烧器结构简图如图 1a 所示。该试验装置流场简单,降低了燃烧器出口附近空气动力复杂性,可以更有效地重点研究液滴蒸发及湍流和化学反应之间的相互作用。燃烧器出口直径为 9.8 mm,围绕中心主射流的是一圈预混值班射流—— $H_2/C_2H_2$ /空气的混合气,其比例以基本保证

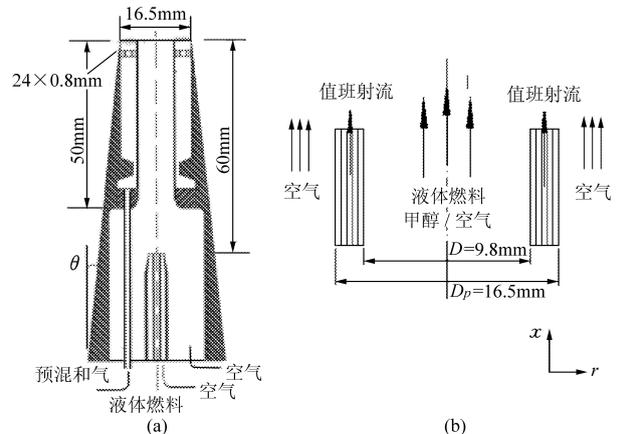


图 1 值班射流火焰燃烧器结构简图

Fig. 1 Schematic of the spray jet burner

和主射流的 C/H 比例相同为原则。该预混合气的化学计量比  $\xi_{st} = 0.1345$ , 值班火焰相当于提供了一热源, 来保证主射流的稳定。该火焰则被周围同方向射流速度为 3 m/s 的空气包围, 如图 1b 所示。

试验参数: 喷油率为 26.3 g/min, 周围空气射流流量为 170.4 g/min, 燃油空气当量比为 0.99, 喷嘴出口处喷雾液滴的索特平均直径  $D_{32}$  为 19.2  $\mu\text{m}$ , 值班射流预混和气为  $\text{H}_2/\text{C}_2\text{H}_2/\text{空气}$ 。

本计算是一个二维轴对称问题。求解区域可取一半, 即为  $x/D = 40, r/D = 8$  的矩形,  $r, x$  方向网格数分别为 71 和 60, 如图 2 所示。在用 Monte Carlo 颗粒法数值求解时, 每个网格中初始虚拟粒子数为 80。喷雾相初始液滴直径分布采用对数正态分布, 其中  $\sigma = 0.67, \mu = 0$ 。甲醇在空气中燃烧时, 引入详细的化学反应机理, 其中包括了 23 种成分, 166 个基元反应, 从而可获得的小火焰面数据库。

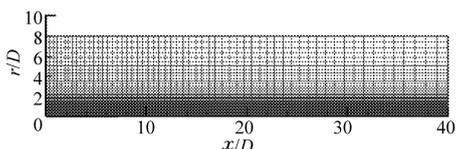


图 2 计算区域的网格生成

Fig. 2 Computational grid

采用自行开发出的喷雾 JPDF 程序代码可计算出温度  $T$ 、速度  $u$ 、湍动能  $k$  和湍流频率  $\omega$ 、OH 质量分数等的分布, 如图 3 所示。

### 3 数值模拟对比分析

本文根据已有试验数据, 重点对计算区域中的温度及喷雾粒径分布进行了对比验证分析。针对该问题, 在 Fluent 软件下采用 EDC 模型(涡团耗散概念模型)进行了数值模拟, 结果如图 4~6 所示。

沿轴向取两个位置  $x/D = 15$  和  $x/D = 5$ , 获取这两个位置下温度及喷雾液滴索特平均直径  $D_{32}$  沿径向的分布曲线, 并与试验数据进行对比, 见图 4 和图 5。图 6 则为轴线上 ( $r/D = 0$ ) 温度分布的数值计算结果和实验数据的对比。

图 4~6 对比可以看出, 本文所建的 JPDF 模型的计算结果更接近试验数据, 从而证实了本喷雾 JPDF 模型的准确性。但对图 4b 及图 6 分析发现, 在接近喷嘴区域以及接近轴线区域的计算结果相对来说偏差稍大。这主要有以下两原因:

(1) 本模型中, 热量输运过程, 只考虑了气相向喷雾液滴相的热输运, 正是由于该过程, 而使液滴温度升高, 进而蒸发。未考虑喷雾液滴相吸热蒸发的同时对周围气相的影响, 会使周围气相温度有所下降。在接近喷嘴区域以及接近轴线区域, 液滴数密

度相对较大, 对周围气相温度的影响会更显著, 从而导致气相温度场在该区域的计算欠准确。

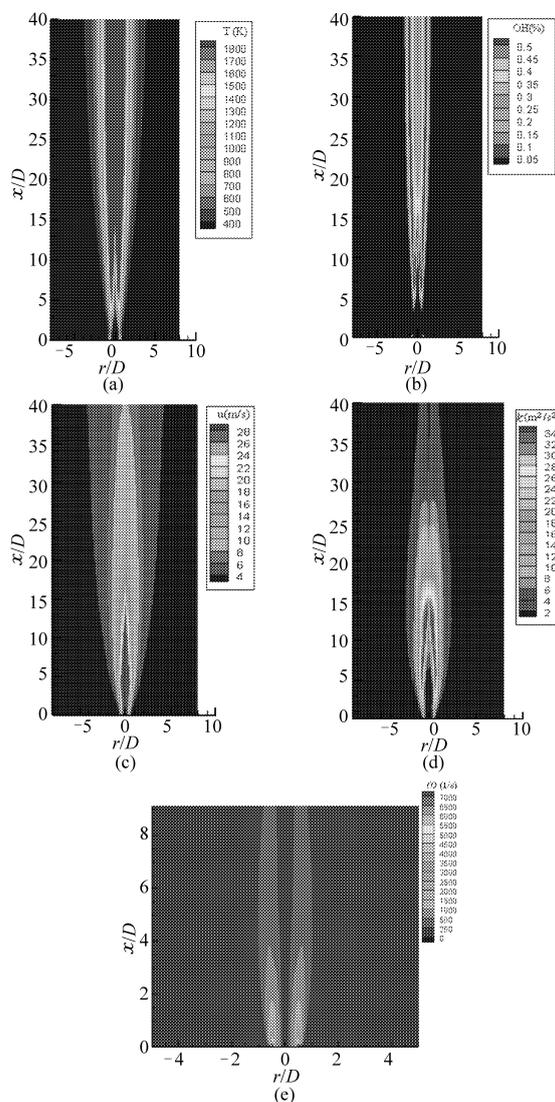


图 3 数值计算结果

Fig. 3 Numerical modeling results

(a) 温度  $T$  (b) OH 质量分数 (c) 速度  $u$   
(d) 湍动能  $k$  (e) 湍流频率  $\omega$

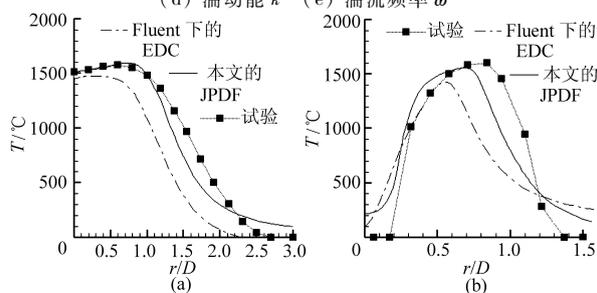


图 4 试验和数值模拟所得的温度沿径向分布

Fig. 4 Radial profiles of flame temperature at two axial stations for modeling and experiment

(a)  $x/D = 15$  (b)  $x/D = 5$

(2) 本模型将喷雾视为稀薄喷雾, 即未考虑喷雾液滴之间的相互作用。而接近喷嘴区域以及接近轴线区域, 液滴数密度较大, 液滴之间的相互作用、

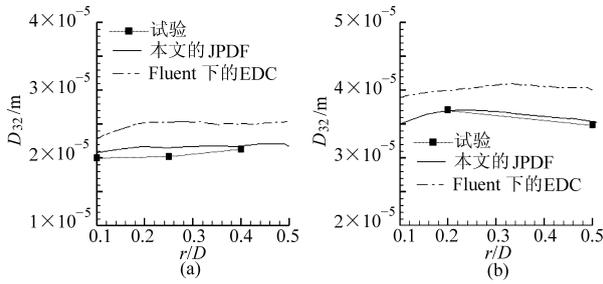


图5 试验和数值模拟所得的喷雾液滴  $D_{32}$  分布

Fig. 5 Radial profiles of  $D_{32}$  at two axial stations for modeling and experiment  
(a)  $x/D = 5$  (b)  $x/D = 15$

相互干扰已比较显著,从而在一定程度上阻碍了液滴的进一步蒸发,从而在该区域实际温度低于本模型数值模拟预测温度。

## 4 结束语

本文将 JPDF 方法应用于两相湍流燃烧,建立

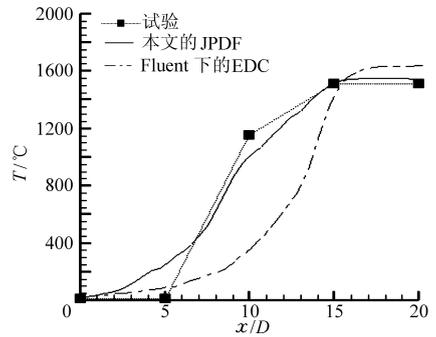


图6 试验和数值模拟所得轴线上( $r/D = 0$ )温度分布

Fig. 6 Centerline flame temperature for modeling and experiment ( $r/D = 0$ )

了两相喷雾湍流反应流的 JPDF 数学模型,并结合小火焰面模型开发了相应的数值代码。通过与已建立的试验数据库中试验数据的反复对比分析,对该模型做出了反复的修正,最终数值模拟结果和试验结果的比较,证明了本模型在一定程度上的准确性。

## 参 考 文 献

- 1 Pope S B. PDF methods for turbulent reactive flows[J]. Progress in Energy and Combustion Science, 1985, 11(2): 119 ~ 192.
- 2 Richard F, Ralph P, Gary C. CFD analyses of complex flows [J]. Computers and Engineering, 2005(29): 2 386 ~ 2 403.
- 3 Bilger R W, Pope S B, Bray K N C, et al. Paradigms in turbulent combustion research[J]. Proceedings of the Combustion Institute, 2005, 30(1): 21 ~ 42.
- 4 Zhu M, Bray K N C, Rumberg O, et al. PDF transport equations for two-phase reactive flows and sprays [J]. Combustion and Flame, 2000, 122(3): 327 ~ 338.
- 5 Bertrand Naud. PDF modeling of turbulent sprays and flames using a particle stochastic approach[D]. Delft: Delft University of Technology, 2003.
- 6 Ge H, Gutheil E. Simulation of a turbulent spray flame using coupled PDF[J]. Combustion and Flame, 2008, 153(1 ~ 2): 173 ~ 185.
- 7 Chen Yungcheng, Starner Sten H, Masri Assaad R. Further study of spray combustion in a simple turbulent jet flow[C] // 15th Australasian Fluid Mechanics Conference, 2006.
- 8 杜宝国, 隆武强, 冯立岩, 等. 柴油机内锥碰撞式伞状喷雾燃烧系统性能试验[J]. 农业机械学报, 2008, 39(1): 25 ~ 29.  
Du Baoguo, Long Wuqiang, Feng Liyan, et al. Conical spray combustion system of diesel engine with inner conical-face impingement mode[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(1): 25 ~ 29. (in Chinese)

(上接第 35 页)

- 3 林恺, 曹树良, 祝宝山, 等. 用于高比转速混流泵设计的流场计算[J]. 清华大学学报, 2008, 48(2): 219 ~ 223.  
Lin Kai, Cao Shuliang, Zhu Baoshan, et al. Flow computations for the design of high specific speed mixed-flow pumps[J]. Journal of Tsinghua University, 2008, 48(2): 219 ~ 223. (in Chinese)
- 4 曹树良, 梁莉, 祝宝山, 等. 高比转速混流泵叶轮设计方法[J]. 江苏大学学报, 2005, 26(3): 185 ~ 188.  
Cao Shuliang, Liang Li, Zhu Baoshan, et al. Design method for impeller of high specific speed mix-flow pump [J]. Journal of Jiangsu University, 2005, 26(3): 185 ~ 188. (in Chinese)
- 5 张勤昭, 曹树良, 陆力. 高比转速混流泵导叶设计计算[J]. 农业机械学报, 2008, 39(2): 73 ~ 76.  
Zhang Qinzhaoh, Cao Shuliang, Lu Li. Research on the guide vane design of high specific speed mixed-flow pump [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(2): 73 ~ 76. (in Chinese)