

空间转动 3-SPS-1-S 型并联机构奇异位形研究*

张艳伟¹ 崔国华¹ 孙振军¹ 张占强²

(1. 河北工程大学机电工程学院, 邯郸 056038; 2. 吉林大学机械科学与工程学院, 长春 130025)

【摘要】 奇异性是机构的固有性质, 奇异位形分析对并联机构的轨迹规划和控制具有重要的意义。研究一种空间转动三自由度 3-SPS-1-S 型并联机构的奇异位形, 构建了该并联机构的运动学模型, 建立了机构位置逆解与速度映射解析方程, 并求出了机构 Jacobian 矩阵; 提出该机构奇异位形的判别准则, 并引入了可操纵度这一运动性能评价指标进行奇异性分析。分析结果表明, 该机构在指定任务空间具有良好的可操纵性与运动性能, 但在工作空间内具有发生位形奇异的可能, 在运动过程中应当避开特殊运动位置以避免奇异位形的发生。

关键词: 并联机构 奇异位形 运动性能 可操纵度

中图分类号: TH122 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)04-0199-05

Singular Loci Analysis of 3-SPS-1-S Spatial Rotation Parallel Manipulator

Zhang Yanwei¹ Cui Guohua¹ Sun Zhenjun¹ Zhang Zhanqiang²

(1. College of Mechanical Engineering, Hebei Engineering University, Handan 056038, China

2. College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract

Singularity is an inherent nature of mechanism, which make a significant impact on mechanism's work performance. The singularity loci of a spatial rotation 3-SPS-1-S parallel mechanism was studied. The parallel robot kinematics model was constructed. The equations for inverse displacement and velocity kinematics were derived, and the Jacobian matrix of this mechanism was analyzed. The singularity criterion was proposed, and two types of singularity were determined to be singular configuration. Manipulability degree was introduced to evaluate kinematical performance of the parallel manipulator for the singularity loci analysis. The results showed that the parallel mechanism has a good manageability and kinematics performance in the specified task space, but the special motion position should be turned away to avoid the occurrence of singularity.

Key words Parallel manipulator, Singular loci, Kinematics performance, Manipulability degree

引言

奇异位形是当机构运动进入某种临界状态时所具有的特定位置, 在临界状态下, 机构的实际自由度不再与其理论自由度数相等, 机构丧失了应有的自由度或机构获得了额外的自由度。奇异位形是机构固有性质, 它对机构的工作性能有很大影响。Gosselin 等从运动学求解的角度对机构的奇异位形

进行研究和分类, 将机构奇异分为边界奇异、位形奇异和复合奇异 3 种情况^[1]。Fichter 等发现 Stewart 平台机构的奇异位形是上平台相对于下平台转过 90° 的位置^[2] 等。

本文研究空间转动三自由度 3-SPS-1-S 型并联机构的运动学模型及奇异位形。通过建立机构的位置逆解与速度映射解析方程, 求出机构的 Jacobian 矩阵, 对机构进行奇异性分析, 提出两种该

机构奇异位形的判别准则;并引入可操纵度这一运动性能评价指标,对该机构进行奇异性分析。

1 3-SPS-1-S 机构描述与坐标系的建立

图1为3-SPS-1-S并联机构的结构简图。固定平台 B 和运动平台 m 是两个不同长度的等边三角形 $B_1B_2B_3$ 和 $b_1b_2b_3$, 顶点由3根可以伸缩的支承杆连接, 每个分支由1个移动副 P 按照 S-P-S 的顺序串接而成, 3个分支与 m 及 B 通过 S 副铰接; 中间约束分支由 S 副组成(相当于3个 R 副串联), S 副位于 O 点处, 约束分支与平台 m 及 B 在其中心处固结。为简化计算, 固定坐标系 $\{B\}$ 与运动坐标系 $\{m\}$ 的原点都位于 O , 其中, 固定坐标系 $\{B\}$ 的 X 轴平行于 $O_B B_1$, Z 轴垂直于平台 B 方向向上, Y 轴方向按右手法则确定; 运动坐标系 $\{m\}$ 的 x 轴平行于 $O_b b_1$, z 轴垂直于平台 m 方向向上, y 轴方向按右手法则确定; 两平台间第 i 条支路两铰点间用矢量 L_i ($i=1, 2, 3$) 表示, 3条支承杆长为 l_i , 其作用方向的单位矢量为 q_i , B 、 m 两个平台三角形外接圆的半径

$${}^B R_m = R_Z(\varphi) R_Y(\theta) R_X(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi & \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\psi \sin\varphi \\ \sin\varphi \cos\theta & \sin\varphi \sin\theta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\psi & \cos\theta \cos\psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, (ψ, θ, φ) 即为动平台的姿态。

2 3-SPS-1-S 型机构运动学模型

2.1 位置逆解模型

位置逆解分析涉及已知动平台姿态 (ψ, θ, φ) , 求解各驱动支链的杆长和姿态。对于直线运动副驱动的并联机构, 约束方程的建立都是将运动平台、静止平台上的铰链点的坐标在参考坐标系中表示, 然后根据支链杆长约束来建立约束方程^[3,5]。

如图1, 在坐标系 $OXYZ$ 下, 构造位置闭环约束方程

$$L_i = l_i q_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

$$L_i = b_i - B_i = {}^B R_m b_i^m - B_i \quad (3)$$

式中, l_i 、 q_i 分别表示驱动支链 i 的杆长和单位矢量, b_i 、 B_i 表示点 b_i 、 B_i 在 $OXYZ$ 下的位置矢量, b_i^m 表示 b_i 在 $Oxyz$ 下的位置矢量。

对式(2)两端取模, 得

$$l_i = \|L_i\| \quad (4)$$

$$q_i = L_i / l_i \quad (5)$$

则由式(3)得到

$$l_i^2 = ({}^B R_m b_i^m - B_i)^2 = B_i^2 + (b_i^m)^2 - 2B_i^T {}^B R_m b_i^m \quad (6)$$

由图1, 各铰链点 b_i 、 B_i 在各自坐标系中的位置坐标为

为 r_B 、 r_b 。 O 距离 B 、 m 两个平台中心的长度为 h_B 、 h_b 。

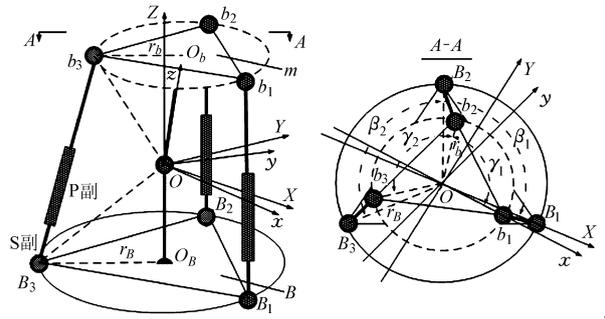


图1 3-SPS-1-S 并联机构的构型及主、俯视图

Fig.1 Main plot and overhead view of 3-SPS-1-S parallel mechanism

为简化计算, $\{B\}$ 与 $\{m\}$ 选择同一原点 O , 将运动坐标系 $\{m\}$ 视作物体坐标系, 可以表示为 $Oxyz$; 固定坐标系 $\{B\}$ 视作参考坐标系, 可以表示为 $OXYZ$ 。并联机构动平台只发生三维转动, 选择固定角坐标系表示法描述姿态旋转矩阵, 定义回转角、俯仰角和偏转角为 (ψ, θ, φ) , 旋转顺序依次为 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, 则 $\{m\}$ 相对于 $\{B\}$ 的旋转矩阵为^[3-4]

$$b_1^m = \begin{bmatrix} r_b \\ 0 \\ h_b \end{bmatrix} \quad b_2^m = \begin{bmatrix} r_b \cos\gamma_1 \\ r_b \sin\gamma_1 \\ h_b \end{bmatrix} \quad b_3^m = \begin{bmatrix} r_b \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \\ r_b \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ h_b \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} r_B \\ 0 \\ -h_B \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} r_B \cos\beta_1 \\ r_B \sin\beta_1 \\ -h_B \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} r_B \cos(\beta_1 + \beta_2) \\ r_B \sin(\beta_1 + \beta_2) \\ -h_B \end{bmatrix}$$

对上述坐标值进行代换, 令

$$\begin{cases} b_i^m = [b_{ix}^m & b_{iy}^m & b_{iz}^m]^T \\ B_i = [B_{ix} & B_{iy} & B_{iz}]^T \end{cases} \quad (7)$$

同时, 为简化计算, 令

$${}^B R_m = \begin{bmatrix} x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

则由式(1)、(8)得到

$$\begin{cases} x_l^2 + x_m^2 + x_n^2 = 1 \\ y_l^2 + y_m^2 + y_n^2 = 1 \\ z_l^2 + z_m^2 + z_n^2 = 1 \\ x_l y_l + x_m y_m + x_n y_n = 0 \\ x_l z_l + x_m z_m + x_n z_n = 0 \\ y_l z_l + y_m z_m + y_n z_n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

将式(1)、(2)、(7)代入式(6)得

$$l_i^2 = \mathbf{B}_i^2 + (\mathbf{b}_i^m)^2 - 2[B_{ix}(x_l b_{ix}^m + y_l b_{iy}^m + z_l b_{iz}^m) + B_{iy}(x_m b_{ix}^m + y_m b_{iy}^m + z_m b_{iz}^m) + B_{iz}(x_n b_{ix}^m + y_n b_{iy}^m + z_n b_{iz}^m)] \quad (10)$$

对于已知定平台姿态 (ψ, θ, φ) ,则由式(10)可以求出3-SPS-1-S型并联机构的3个驱动杆长,即求得机构的位置逆解。

2.2 速度映射模型及 Jacobian 矩阵求解

速度分析的目的在于为后续的机构性能分析等提供 Jacobian 矩阵,需要构造姿态机构输入输出速度方程^[4,6]。已知姿态机构驱动关节速度矢量 $\dot{\mathbf{l}}$ 、动平台操作空间速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 为

$$\dot{\mathbf{l}} = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3]^T \quad \boldsymbol{\omega} = [\dot{\psi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}]^T$$

对式(10)位置逆解方程两边关于时间求微分,可以得到机构输入与输出之间的速度约束方程

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\omega} \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [d_{i1} \quad d_{i2} \quad d_{i3}]_{3 \times 3}$$

$$\begin{cases} d_{i1} = 2B_{ix}(b_{iy}^m k_1 + b_{iz}^m k_2) + 2B_{iy}(b_{iy}^m k_3 + b_{iz}^m k_4) + 2B_{iz}(b_{iy}^m k_5 + b_{iz}^m k_6) \\ d_{i2} = 2B_{ix}(b_{ix}^m k_7 + b_{iy}^m k_8 + b_{iz}^m k_9) + 2B_{iy}(b_{ix}^m k_{10} + b_{iy}^m k_{11} + b_{iz}^m k_{12}) + 2B_{iz}(b_{ix}^m k_{13} + b_{iy}^m k_{14} + b_{iz}^m k_{15}) \\ d_{i3} = 2B_{ix}(b_{ix}^m k_{16} + b_{iy}^m k_{17} + b_{iz}^m k_{18}) + 2B_{iy}(b_{ix}^m k_{19} + b_{iy}^m k_{20} + b_{iz}^m k_{21}) \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \\ k_2 &= -\cos\varphi \sin\theta \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \\ k_3 &= \sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \\ k_4 &= -\sin\varphi \sin\theta \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \\ k_5 &= \cos\theta \cos\psi \quad k_6 = -\cos\theta \sin\psi \\ k_7 &= -\cos\varphi \sin\theta \quad k_8 = \cos\varphi \cos\theta \sin\psi \\ k_9 &= \cos\varphi \cos\theta \cos\psi \quad k_{10} = -\sin\varphi \sin\theta \\ k_{11} &= \sin\varphi \cos\theta \sin\psi \\ k_{12} &= \sin\varphi \cos\theta \cos\psi \quad k_{13} = -\cos\theta \\ k_{14} &= -\sin\theta \sin\psi \quad k_{15} = -\sin\theta \cos\psi \\ k_{16} &= -\sin\varphi \cos\theta \\ k_{17} &= -\sin\varphi \sin\theta \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \\ k_{18} &= -\sin\varphi \sin\theta \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \\ k_{19} &= \cos\varphi \cos\theta \\ k_{20} &= \cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \\ k_{21} &= \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \end{aligned}$$

由式(11)得到3-SPS-1-S型并联机构关节速度与操作速度的映射模型

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (13)$$

即机构的 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (14)$$

3 3-SPS-1-S型机构奇异位形判断准则

机构的奇异位形可通过机构的 Jacobian 矩阵行列式等于零求出^[7]。由式(14),当机构处于奇异位形时有

$$\det(\mathbf{J}) = 0 \quad (15)$$

此时机构的运动不确定或被限制,在应用中应当避免机构处于奇异位形。

为保证并联姿态机构的结构对称性,取上下平台为等边三角形。考察式(14)、(15),得到3种情况:

(1)当3条驱动支链的轴线延长线相交于一点时,构成奇异位形。有

$$\mathbf{J} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & -(r_B h_b + r_b h_B) & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(r_B h_b + r_b h_B) & \frac{1}{2}(r_B h_b + r_b h_B) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(r_B h_b + r_b h_B) & \frac{1}{2}(r_B h_b + r_b h_B) & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中 $l = \sqrt{(r_B - r_b)^2 + (h_B + h_b)^2}$

显然,该 Jacobian 矩阵奇异。

(2)当3条驱动支链平行时,构成奇异位形。有

$$\mathbf{J} = \frac{r_B h_b + r_b h_B}{h_b + h_B} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

显然,该 Jacobian 矩阵奇异。

(3)当3条驱动链处于同一平面时,构成奇异位形。对于该类情况,仅有当 $h_B = 0$,当动平台移到与静平台处于同一平面时,则机构奇异。对于本文的并联机构,因为运动平台的转动限制在一定范围内,该极限位置情况不会发生。

根据式(11)中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的行列式的奇异情况,Gosselin把并联机构的奇异位形分为3种类型^[1]: $\det(\mathbf{B}) \neq 0$,称为边界奇异; $\det(\mathbf{A}) \neq 0$,且 $\det(\mathbf{B}) = 0$,称为位形奇异; $\det(\mathbf{A}) = 0$,且 $\det(\mathbf{B}) = 0$,称为混合奇异。

考察式(11)得到: $\det(\mathbf{A}) = 8l_1 l_2 l_3 \neq 0$,因此,该机构不可能发生边界奇异。当发生奇异位形时,有

$$\mathbf{B} = (r_B h_b + r_b h_B) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

显然 $\det(\mathbf{B}) = 0$, 即该机构存在两类奇异位形都属于位形奇异。当发生该类奇异状态时, 机构具有多余的自由度, 动平台不能承受任何重量的载荷。

4 基于可操纵性指标的奇异位形分析

就操作和控制精度而言, 机构不但应该避免奇异位形, 而且应该在远离奇异位形的区域工作^[8]。因为当机构接近奇异位形时, Jacobian 矩阵将成为病态的矩阵, 其逆矩阵精度降低, 从而使机构的输入和输出运动之间的传递关系失真, 衡量这种运动失真程度的指标就是灵巧度^[9]。在这里引入可操作性指标作为机构灵巧度的评价指标。

4.1 可操作性指标

可操纵度是将雅可比矩阵与其转置乘积的行列式作为评价机构灵巧度的指标。即

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)} \quad (19)$$

当 $w = 0$ 时, 可判断机构处于奇异位形, 说明有限的关节速度将导致操作速度趋于无穷, 物理意义可解释为动平台失稳。当 $w \neq 0$, 机构处于非奇异位形, w 的值能直观的反映机构远离奇异位形的程度^[10]。

4.2 应用算例分析

对于图 1 的 3-SPS-1-S 型机构, 取机构的尺寸: $r_B = 0.62 \text{ m}$, $r_m = 0.25 \text{ m}$, $h_B = 1 \text{ m}$, $h_b = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 120^\circ$ 。根据式(19), 利用 Matlab 编制仿真程序, 依次取 $\varphi = 10^\circ$ 、 $\theta = 10^\circ$ 、 $\psi = 10^\circ$, 其他两个角度在工作空间范围 $[-15^\circ, 15^\circ]$ 内变化, 得到机构可操纵度 w 在工作空间内的变化, 如图 2 所示。

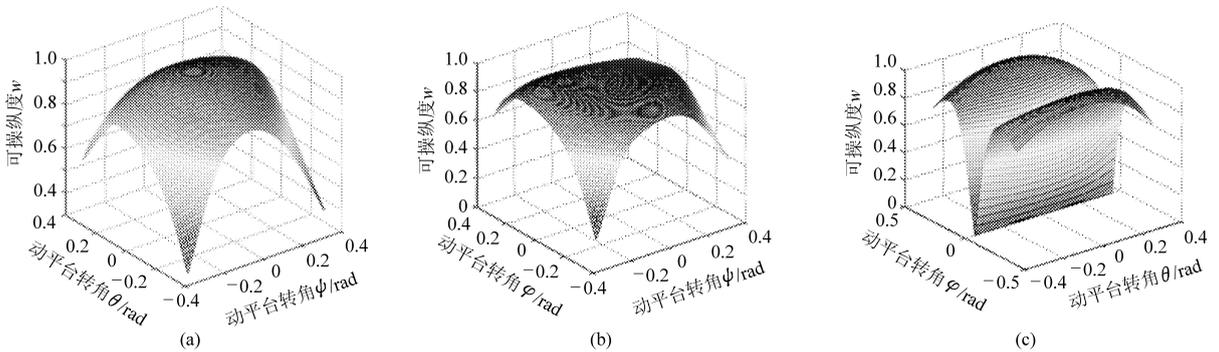


图 2 机构可操纵性指标的空间分布

Fig. 2 Manipulability degree distribution in workspace

(a) $\varphi = 10^\circ$ (b) $\theta = 10^\circ$ (c) $\psi = 10^\circ$

由图 2 得到, 该并联机构可操纵度 w 的变化范围: $\varphi = 10^\circ$, $0.3243 \leq w \leq 0.9872$; $\theta = 10^\circ$, $0.1843 \leq w \leq 0.9006$; $\psi = 10^\circ$, $0.1130 \leq w \leq 0.9901$ 。

图 2 仿真结果表明: 3-SPS-1-S 型并联机构的可操纵度在指定任务空间内的变化范围不大, $w \neq 0$, 说明该机构在给定工作空间内没有奇异位形; 但其极值 ($w_{\min} = 0.1130$, $w_{\max} = 0.9901$) 小于 1, 趋近于零, 说明机构在一些运动位置接近奇异位形, 在运动过程中应当注意并采取措施避免奇异位形的发生, 以防动平台失稳而影响运动的稳定性。同时, 分析结果表明, 当沿 3 条驱动支链的轴线延长线相交于一点, 且 $\psi = 0$ 、 $\theta = 0$ 、 $\varphi = 0$ 时, $w = 0$, 即机构处于位形奇异, 这时机构具有多余的自由度, 动平台不能承受任何重量的载荷, 在运动过程中应该尽量避

开该位置。

5 结束语

提出的空间转动三自由度 3-SPS-1-S 型并联机构, 由 3 条无约束主动支链提供驱动, 1 条恰约束从动支链提供约束, 可以实现运动平台在任务空间的横摇、仰俯和偏转运动。在对该机构进行运动学分析基础上, 提出该机构奇异位形的判别准则, 判定该机构存在位形奇异, 并引入可操纵度这一运动性能评价指标对该机构进行了奇异位形分析。分析结果表明该机构在指定工作空间具有较好的可操纵性与运动性能; 但在运动过程中应当避开特定运动位置以避免位形奇异的发生。

参 考 文 献

- Gosselin C, Angeles J. Singularity analysis of closed-up kinematics chains [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281 ~ 290.
- Fichter E F. A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction [J]. International Journal of Robotics Research, 1986, 5(2): 157 ~ 182.

- 3 Lu Yi, Hu Bo, Liu Pingli. Kinematics and dynamics analyses of a parallel manipulator with three active legs and one passive leg by a virtual serial mechanism[J]. *Multibody System Dynamics*, 2007, 17(4):229 ~ 241.
- 4 崔国华,张艳伟,张英爽,等. 空间转动型3-SPS/S并联机器人的构型设计分析[J]. *吉林大学学报:工学版*, 2009, 39(增刊1):200 ~ 205.
Cui Guohua, Zhang Yanwei, Zhang Yingshuang, et al. Configuration design and analysis of a new 3-SPS/S spatial rotation parallel manipulator[J]. *Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition*, 2009, 39(Supp. 1): 200 ~ 205. (in Chinese)
- 5 崔国华,王国强,赵春江,等. 空间转动三自由度并联微调机构设计与运动学分析[J]. *农业机械学报*, 2008, 39(9): 144 ~ 148.
Cui Guohua, Wang Guoqiang, Zhao Chunjiang, et al. Mechanism design and kinematic analysis on a three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2008, 39(9): 144 ~ 148. (in Chinese)
- 6 Carretero J A, Podhorodeski R P, Nahon M N. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2000, 122(1):17 ~ 24.
- 7 白志富,韩先国,陈五一. 冗余驱动消除并联机构奇异研究[J]. *航空学报*, 2006, 27(4):733 ~ 736.
Bai Zhifu, Han Xianguo, Chen Wuyi. Study on elimination singularities of parallel mechanism by actuation redundancy[J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2006, 27(4):733 ~ 736. (in Chinese)
- 8 吴鑫,陈美丽,张彦斌. 2T1R 并联机构位置及奇异性分析[J]. *农业机械学报*, 2010, 41(2):208 ~ 213.
Wu Xin, Chen Meili, Zhang Yanbin. Analysis of position and singularity of a parallel mechanism with three degrees of freedom [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2010, 41(2):208 ~ 213. (in Chinese)
- 9 张彦斐,宫金良,高峰. 冗余驱动消除并联机构位形奇异原理[J]. *中国机械工程*, 2006, 17(5):445 ~ 448.
Zhang Yanfei, Gong Jinliang, Gao Feng. Theory of singularity elimination by redundant actuation for parallel mechanism[J]. *China Mechanical Engineering*, 2006, 17(5): 445 ~ 448. (in Chinese)
- 10 张彦斌,刘宏昭,吴鑫,等. 2T1R 弱耦合并联机构的运动学和奇异性分析[J]. *农业机械学报*, 2008, 39(4):137 ~ 141.
Zhang Yanbin, Liu Hongzhao, Wu Xin, et al. Kinematics and singularity analysis of a novel weakly-coupled parallel manipulator[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2008, 39(4):137 ~ 141. (in Chinese)