

考虑粘滑摩擦的时变振动系统模态参数辨识*

刘丽兰 刘宏昭 原大宁 吴子英

(西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

【摘要】 将摩擦因素引入时变振动系统的模态辨识中。采用时变多变量 Prony 法,对振动系统的多输出响应信号建立时变多变量 Prony 模型,并利用递推最小二乘法估计模型参数,提取出振动系统的模态特征信息。数值仿真中,对含复合频率信号的频率进行了辨识,辨识值与理论值较好的吻合性验证了该方法的有效性。应用实例中,对平面两杆操作臂中的滑动质量块建立了考虑 LuGre 摩擦的运动方程,利用时变多变量 Prony 法辨识出含粘滑摩擦的操作臂的固有频率,结果令人满意,验证了该方法的可行性。

关键词: 时变系统 模态参数 时变多变量 Prony 法 粘滑摩擦

中图分类号: TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)01-0177-05

Modal Parameter Identification of Time Varying Vibration Systems Subjected to Stick-slip Friction

Liu Lilan Liu Hongzhao Yuan Daning Wu Ziyang

(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract

Friction is introduced into the modal parameter identification of the time varying vibration systems. The modal characteristics of the vibration system are extracted by using the time varying multivariable Prony method. A time varying multivariable Prony model is established for the multi-output response signals of the vibration system and the parameters of the model are estimated by means of the recursive least square method. In the simulation, a signal with composite frequency is identified. The identified results meet the theoretical values well, which verifies the effectiveness of the presented method. In the example, the motion equation of the moving mass on the planar two-bar manipulator is established, in which the LuGre friction is considered. The natural frequency of the manipulator subjected to stick-slip friction is identified by using the time varying multivariable Prony method. The feasibility of the method is verified by the satisfying identification results.

Key words Time varying system, Modal parameter, Time varying multivariable Prony method, Stick-slip friction

引言

在很多工程实际中人们利用摩擦来工作,如汽车的轮胎、离合器、刹车片等。然而对于机器人、数控机床等这样的精密机械系统而言,摩擦的存在引

起了粘滑运动、极限环振荡以及跟踪误差等不利因素。由于摩擦可使机械系统中运动的部件发生粘着,因而对这些系统的振动模态将产生一定的影响。文献[1]采用小波分析对由于摩擦引起的粘滑信号进行分析,通过单自由度系统的仿真发现系统处于

收稿日期: 2009-09-03 修回日期: 2009-10-11

* 国家科技重大专项计划资助项目(2009ZX04014-015)、国家自然科学基金资助项目(50575180)、陕西省高等学校重点学科专项资金建设项目和西安理工大学优秀博士基金资助项目

作者简介: 刘丽兰, 讲师, 博士生, 主要从事机电系统建模与控制研究, E-mail: liulians@163.com

粘着状态时,系统的响应频率有突变。

时变振动系统的模态参数辨识一直是结构设计和参数辨识领域的一个难点。时变参数模型法是处理非平稳信号的一种有效方法,其在时变信号中信息提取的稳定性较好,常用于时变系统的模态参数辨识^[2]。时变多变量 Prony 法可以同时处理多维非平稳响应信号,并已成功地应用到不考虑摩擦的时变系统的模态辨识中^[3]。

摩擦作为一种复杂的物理现象,对机械系统振动模态有着重要的影响。本文将摩擦因素引入时变系统的模态辨识中。根据振动系统的响应信号建立时变多变量 Prony 模型,采用递推最小二乘法估计模型参数,着重研究受粘滑摩擦影响的时变系统的模态频率辨识问题,并通过数值仿真和应用实例来验证所提出的辨识方法的有效性。

1 时变多变量 Prony 法

经典的 Prony 法^[4]常用于定常机械系统模态参数辨识。求得模态参数的关键在于对观测序列 $\{x_t\}$ 建立自回归 AR(p) 模型

$$x_t + \sum_{i=1}^p c_i x_{t-i} = \varepsilon_t \quad (1)$$

式中 p ——模型阶数 c_i ——自回归参数
 ε_t ——残差序列

求出 AR 模型参数 c_i 后,由于 $\Psi(z_j) = 0$,所以

$$z^p + c_1 z^{p-1} + \dots + c_{p-1} z + c_p = 0 \quad (2)$$

两边同时除以 z^p ($z^p \neq 0$),还可以得到

$$1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{p-1} z^{1-p} + c_p z^{-p} = 0 \quad (3)$$

由式(2)求出 z_j ($j=1,2,\dots,p$),可求出频率 f_{dj}

$$f_{dj} = \frac{1}{2\pi\Delta} \arctan \frac{\text{Im}z_j}{\text{Re}z_j} \quad (4)$$

以经典 Prony 法为基础,对于具有多输出非平稳响应信号的时变振动系统的模态参数辨识,可以将单变量 AR 模型扩展到时变多变量 AR 模型

$$X_t + \sum_{i=1}^p \Phi_i(t) X_{t-i} = E_t \quad (t=1,2,\dots,N) \quad (5)$$

其中 $X_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{lt}]^T$
 $E_t = [e_{1t}, e_{2t}, \dots, e_{lt}]^T$

式中 X_t —— l 维时序向量

E_t —— l 维白噪声向量

$\Phi_i(t)$ —— l 阶时变自回归参数矩阵

$\Phi_i(t)$ 可以表示为一组基函数的线性组合

$$\Phi_i(t) = \sum_{j=0}^m \varphi_{ij} g_j(t) \quad (6)$$

式中 $g_j(t)$ ——基函数

m ——基函数扩展的维数

φ_{ij} —— l 阶加权系数矩阵

几种常用的基函数见文献[3]。

记 t_d 时刻模型的参数是 $\Phi_i(t_d)$,则根据式(3)的思路,有

$$\det[I + \Phi_1(t_d)z^{-1}(t_d) + \dots + \Phi_{p-1}(t_d)z^{1-p}(t_d) + \Phi_p(t_d)z^{-p}(t_d)] = 0 \quad (7)$$

为了避免解非线性方程组,重组一新的矩阵

$$G(t_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ -\Phi_p(t_d) & -\Phi_{p-1}(t_d) & \dots & & & -\Phi_1(t_d) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 \mathbf{I} —— l 阶单位矩阵

通过求解 $\det[\mathbf{I}\lambda(t_d) - \mathbf{G}(t_d)] = 0$,可得到特征值 $\lambda_j(t_d)$ 。式(8)与式(7)具有相同的特征多项式,所以有 $z_j(t_d) = \lambda_j(t_d)$,再根据式(4)就可求出 t_d 时刻系统的模态频率。

2 递推最小二乘法估计模型参数

递推算法的基本思路是每取得一个新的观测数据后,不用全部数据重新计算,而只需在原有估计量的基础上,根据取得的数据带来的新信息,对原估计量进行一些修正就得到新估计量。可将定常参数模型参数估计的递推最小二乘法推广于时变参数模型中。

$$\mathbf{Q}^T = [\varphi_{10}, \dots, \varphi_{1m}, \dots, \varphi_{p0}, \dots, \varphi_{pm}] \quad (9)$$

$$\mathbf{Y}_{t-1}^T = [\mathbf{X}_{t-1}^T g_0(t), \dots, \mathbf{X}_{t-1}^T g_m(t), \dots, \mathbf{X}_{t-p}^T g_0(t), \dots, \mathbf{X}_{t-p}^T g_m(t)] \quad (10)$$

则式(5)可以写成

$$\mathbf{X}_t^T = -\mathbf{Y}_{t-1}^T \mathbf{Q} + \mathbf{E}_t^T \quad (11)$$

在时间段 $[1, N]$ 上,式(11)的最小二乘估计式为

$$\sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{X}_t^T = - \left| \sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-1}^T \right| \hat{\Phi}_N \quad (12)$$

$$\hat{\Phi}_N = - \left| \sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-1}^T \right|^{-1} \sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{X}_t^T \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_N = \left| \sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-1}^T \right|^{-1}$$

则参数 $\hat{\Phi}$ 的递推最小二乘算法为

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_N (1 + \mathbf{Y}_N^T \mathbf{P}_N \mathbf{Y}_N)^{-1} \mathbf{Y}_N^T \mathbf{P}_N$$

$$\hat{\Phi}_{N+1} = \hat{\Phi}_N - \mathbf{P}_N \mathbf{Y}_N (1 + \mathbf{Y}_N^T \mathbf{P}_N \mathbf{Y}_N)^{-1} (\mathbf{X}_{N+1}^T + \mathbf{Y}_N^T \hat{\Phi}_N)$$

以上的递推算式可见,整个递推过程分两个阶段。一是递推矩阵 \mathbf{P} ,一是递推参数估计值 $\hat{\Phi}$,矩阵

P 为中间变量矩阵, 有关历史数据的全部信息存在其中。当数据不断增加时, 矩阵 X 不断扩大, 矩阵 P 却不扩大。矩阵 P 是整个递推算法的关键, 没有它, 参数的递推过程就无法进行。

为了起动递推算法, 要求知道初始值 $\hat{\Phi}_0$ 和 P_0 , 一般情况下, 可采用一种简单的方法来选择初始值。文献[5]给出了初始值的选择

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_0 &= 0 \\ P_0 &= \mu I \end{aligned} \quad (15)$$

式中 μ ——足够大的正数($\mu \gg 1$)

I —— $l(m+1)p$ 阶单位矩阵

可以证明, 经过一定次数的迭代之后, 就能得到满意的参数估计量。

3 LuGre 摩擦模型

法国学者 Canudas 在 Dahl 模型的基础上提出了 LuGre 模型^[6]。该模型是 Dahl 模型^[7]的扩展, 同时采纳了鬃毛模型^[8]的思路。不同的是, 鬃毛模型描述的是摩擦的随机行为, 而 LuGre 模型是基于鬃毛的平均变形来建模。当接触面受切向力作用时, 鬃毛会像弹簧一样变形从而产生摩擦力。

由于 LuGre 摩擦模型属于动态摩擦模型, 而且参数较少, 在不考虑非局部记忆的情况下, 该模型既可以描述静态摩擦现象, 又可以描述动态摩擦现象, 其应用最为广泛。该模型数学表达式如下:

鬃毛的平均变形用状态变量 z 表示, 建模为

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma_0}{g(v)} z |v| \quad (16)$$

摩擦力由鬃毛的挠曲产生, 可以描述为

$$f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (17)$$

式中 σ_2 ——粘性摩擦因数 σ_1 ——鬃毛阻尼

σ_0 ——鬃毛平均刚度 v ——相对速度

函数 $g(v)$ 描述了 Stribeck 效应

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c) e^{-v/v_s} \quad (18)$$

式中 f_s ——最大静摩擦力/力矩

f_c ——库仑摩擦力/力矩

v_s ——Stribeck 速度

本文 LuGre 摩擦模型的参数值如表 1 所示。

表 1 LuGre 摩擦模型参数

Tab. 1 Parameters of the LuGre friction model

参数	数值	参数	数值
$\sigma_0 / N \cdot m^{-1}$	10 000	f_c / N	2
$\sigma_1 / N \cdot s \cdot m^{-1}$	300	f_s / N	3
$\sigma_2 / N \cdot s \cdot m^{-1}$	1	$v_s / m \cdot s^{-1}$	0.01

4 数值仿真

为了检验时变多变量 Prony 法辨识时变频率的有效性, 在此设计了两路输出相同的理论信号, 信号中既含有定常频率又含有正弦变化的频率, 即

$$f = \begin{cases} 0.25 + 0.2 \sin\left(\frac{10\pi}{3t}\right) & (0 \leq t \leq 0.6 \text{ s}) \\ 0.25 & (0.6 \text{ s} < t \leq 1 \text{ s}) \end{cases} \quad (19)$$

时变频率变化周期为 1 s。图 1 给出了 3 s 内信号的时间历程。采用时变多变量 Prony 法, 通过多次尝试, 选用傅里叶基函数, 维数取为 70, 辨识出的时变频率如图 2 所示。

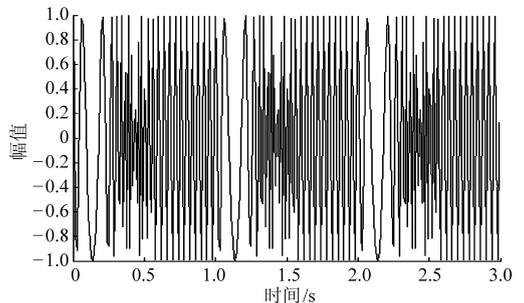


图 1 时域仿真信号

Fig. 1 Simulation signal in time domain

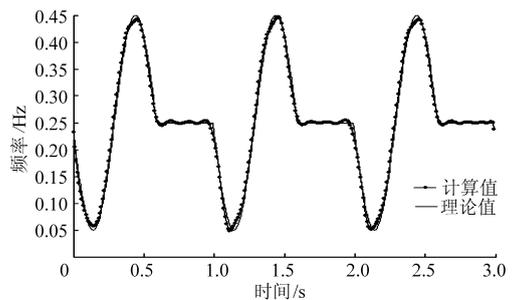


图 2 时变多变量 Prony 法辨识结果

Fig. 2 Identified results obtained by the time varying multivariable Prony method

从图 2 可以看出, 对于含有时变频率的时变信号, 无论是频率正弦变化部分还是定常部分, 采用时变多变量 Prony 法都可以较好地辨识出来。正弦频率辨识值与理论值吻合较好, 定常频率的辨识结果在理论值上下波动, 均值与理论值基本相符。

5 应用实例

在验证了时变多变量 Prony 法的有效性后, 以文献[3]中的时变平面两杆操作臂系统为实例, 研究粘滑摩擦对该系统模态参数的影响。该机械手系统简图如图 3 所示。在每个刚性、均质的连杆上均有一个可沿杆滑动的环形质量块 μ_1 和 μ_2 , q_1 、 q_2 分别为施加在两个铰接处的外转矩。该操作臂系统的相关参数如表 2 所示。

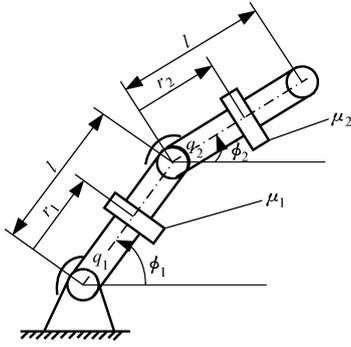


图3 平面两杆操作臂系统简图

Fig.3 Schematic diagram of the planar two-bar manipulator

表2 平面两杆操作臂系统参数值

Tab.2 Parameters of the planar two-bar manipulator system

参数	数值
连杆1和2的长度 l/m	1
连杆1和2的质量 m/kg	1
滑动圆环的质量 $\mu_1, \mu_2/kg$	0.25
弹簧1的扭转刚度 $k_1/N \cdot m \cdot rad^{-1}$	100
弹簧2的扭转刚度 $k_2/N \cdot m \cdot rad^{-1}$	80
比例阻尼系数 a	0.005

如果该操作臂从初始位置 (ϕ_{10}, ϕ_{20}) 运动,那么实际杆件的位置为 $\phi_1 = \phi_{10} + \phi_{11}, \phi_2 = \phi_{20} + \phi_{21}$,其中 ϕ_{11}, ϕ_{21} 为相对角位移。该系统的动力学方程为

$$M(t)\ddot{\varphi} + C(t)\dot{\varphi} + K\varphi = q(t) \quad (20)$$

其中

$$\varphi = [\phi_{11} \quad \phi_{21}]^T$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \mu_1 r_1^2 + \mu_2 l^2 & (\alpha_2 + \mu_2 r_2 l) \cos \delta \phi_0 \\ (\alpha_2 + \mu_2 r_2 l) \cos \delta \phi_0 & \alpha_3 + \mu_2 r_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 2\mu_1 r_1 \dot{r}_1 & \mu_2 \dot{r}_2 l \cos \delta \phi_0 \\ \mu_2 \dot{r}_2 l \cos \delta \phi_0 & 2\mu_2 r_2 \dot{r}_2 \end{bmatrix} + aK$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) - q_2(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

式中 φ ——相对角位移列阵

$M(t)$ ——时变质量矩阵

$C(t)$ ——时变阻尼矩阵

K ——非时变刚度矩阵

$q(t)$ ——输入矢量

式中系数 $\alpha_1 = 4ml^2/3, \alpha_2 = ml^2/2, \alpha_3 = ml^2/3, \delta\phi_0 = \phi_{10} - \phi_{20}$ 。阻尼矩阵 $C(t)$ 中包含附加比例阻尼项, a 代表比例系数。 r_i 表示质量块 μ_1, μ_2 沿各自杆件运动的轨迹。

质量块与杆件之间存在摩擦。忽略系统铰链处的摩擦。对每个质量块采用相同控制参数的 PD 轨迹控制,则每个质量块的运动方程为

$$m_i \ddot{x}_i = u_i - f_i \quad (i=1,2) \quad (21)$$

式中 f_i ——摩擦力

假设两个质量块所受摩擦力相同,由式(17)给

出,则 PD 控制力为

$$u_i = k_p(r_i(t) - x_i(t)) + k_d(\dot{r}_i(t) - \dot{x}_i(t)) \quad (22)$$

式中, $k_p = 12$ 为比例增益, $k_d = 2$ 为微分增益。

令质量块的目标位移方程为

$$r_i(t) = r_{i0} + \delta r_i \sin(2\pi t/P) \quad (i=1,2) \quad (23)$$

式中, $P = 2$ s 表示系统运动变化周期, $r_{i0} = 0.5$ m, $\delta r_i = 0.3$ m。

当质量块换向运动时,在摩擦的影响下,将发生粘滑运动。图4给出了控制参数 $k_p = 12$ 和 $k_d = 2$ 时质量块的跟踪轨迹。可以看出,质量块在摩擦力的影响下,其位移出现了平顶现象,发生了明显的粘滑运动。

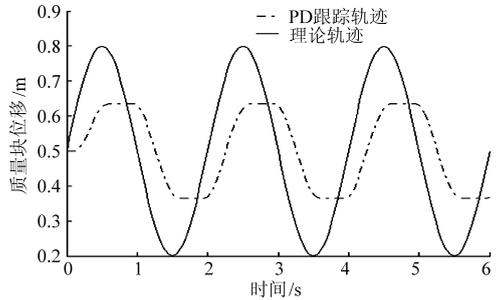


图4 质量块 PD 跟踪轨迹

Fig.4 Tracking path of the mass block with PD control

基于文献[3]的计算结果,辨识高阶频率和阻尼比难度较大,当考虑摩擦影响时难度更大,因此仅对该系统的第一阶固有频率进行辨识。通过操作臂系统的动力学方程和质量块运动方程可以分别计算出系统考虑 LuGre 摩擦和不计摩擦时操作臂系统的第一阶理论固有频率,如图5所示。

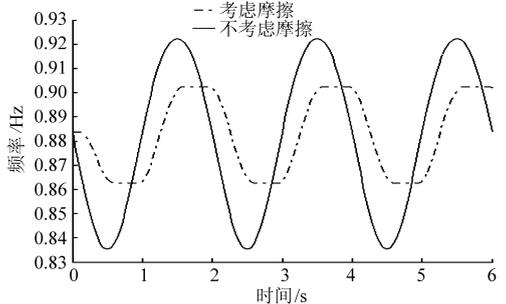


图5 平面两杆操作臂系统第一阶固有频率

Fig.5 First order natural frequency of the planar two-bar manipulator

从图5可以看出,摩擦对时变系统的固有频率的影响较大,在相位和幅值方面都有影响。当环形质量块 μ_1 和 μ_2 同时出现滑动时,系统的固有频率将呈正弦变化,而当环形质量块 μ_1 和 μ_2 同时出现粘着时,固有频率将由正弦变化转为定常值。

令操作臂运动初始位置为 $(\phi_{10}, \phi_{20}) = (45^\circ, 0^\circ)$,输入 $q_1(t)$ 为一平稳随机且不可观测的转矩序列, $q_2(t)$ 恒为零。Matlab 仿真生成系统的双输出非

平稳响应信号 ϕ_{11} 和 ϕ_{21} 。采用时变多变量 Prony 法,选用傅里叶基函数,维数取为 70,对操作臂的双输出非平稳响应信号同时进行辨识,所辨识出的系统第一阶固有频率如图 6 所示。

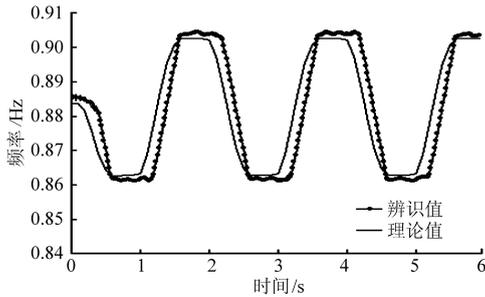


图 6 时变多变量 Prony 法辨识系统第一阶固有频率
Fig. 6 First order natural frequency of the manipulator obtained by the time varying multivariable Prony method

从图 6 的辨识结果来看,时变多变量 Prony 法辨识出的第一阶系统固有频率与理论值在曲线形式上吻合较好,虽然相位和幅值存在微小的差异,但是对于既含有定常频率又含有正弦频率的复杂情况来讲,辨识精度还是令人满意的。

6 结束语

研究了粘滑运动对系统振动频率的影响,采用时变多变量 Prony 法从系统振动响应信号中进行信息特征提取,辨识出含有粘滑摩擦的时变多输出振动系统的模态频率。通过对含复合频率的信号和含有 LuGre 摩擦的时变平面两杆操作臂系统的仿真辨识验证了该方法的有效性,为含粘滑摩擦的时变振动系统的模态参数辨识提供了一种可行的方法。

参 考 文 献

- 1 Liang Jinwei, Brian F Feeny. Wavelet analysis of stick-slip signals in oscillators with dry-friction contact[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2005, 127(2): 139 ~ 143.
- 2 张海勇, 马孝江, 盖强. 非平稳信号的一种 ARMA 模型分析方法[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(7): 992 ~ 996.
Zhang Haiyong, Ma Xiaojiang, Gai Qiang. A new method for ARMA model of non-stationary signal[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2002, 24(7): 992 ~ 996. (in Chinese)
- 3 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 等. 基于时变多变量 Prony 法的时变振动系统模态参数辨识[J]. 机械工程学报, 2006, 42(1): 134 ~ 138.
Liu Lilan, Liu Hongzhao, Wu Ziyang, et al. Model parameter identification of time varying vibration systems using the time varying multivariate Prony method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(1): 134 ~ 138. (in Chinese)
- 4 杨叔子, 吴雅. 时间序列分析的工程应用[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1989.
- 5 吴今培. 时间序列分析[M]. 长沙:湖南科学技术出版社, 1989.
- 6 Canudas de Wit C, Olsson H, Astrom K J, et al. A new model for control of systems with friction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(3): 419 ~ 425.
- 7 Dahl P R. Solid friction damping of mechanical vibrations[J]. AIAA Journal, 1976, 14(12): 1 675 ~ 1 682.
- 8 Haessig D A, Friedland B. On the modeling and simulation of friction [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1991, 113(3): 354 ~ 362.